



# Analyse numérique de perturbations singulières d'opérateurs du premier ordre en temps et polynôme $L_p$ extrémaux

Mohamed Belhout

## ► To cite this version:

Mohamed Belhout. Analyse numérique de perturbations singulières d'opérateurs du premier ordre en temps et polynôme  $L_p$  extrémaux. Mathématiques générales [math.GM]. INSA de Lyon, 2012. Français. NNT : 2012ISAL0065 . tel-01212457

**HAL Id: tel-01212457**

**<https://theses.hal.science/tel-01212457>**

Submitted on 6 Oct 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

N d'ordre xxxxx-ISAL-XXXX

# Thèse

## Analyse numérique de perturbations singulières d'opérateurs du premier ordre en temps et polynômes $L^p$ extrémaux

Présentée par

**Mohamed Belhout**

le 09 juillet 2012,

devant

**L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

Pour l'obtention du DIPLÔME DE DOCTORAT

École doctorale : InfoMaths (Informatique et Mathématiques)

**Mention : Mathématiques Appliquées**

---

**Directeurs de thèse**

Pousin Jérôme

---

### Jury

<b>Président :</b>	Emmanuel Maitre	Université Grenoble
<b>Rapporteurs :</b>	Yves Burgault	Université d'Ottawa
	Boukhemis Ammar	Université Annaba
<b>Examineurs :</b>	Yves Renard	INSA de Lyon
	Pousin Jérôme	INSA de Lyon

---

## Remerciements

La présente étude n'aurait pas été possible sans le bienveillant soutien de certaines personnes. Et je ne suis pas non plus capable de dire dans les mots qui conviennent, le rôle qu'elles ont pu jouer à mes côtés pour en arriver là. Cependant, je voudrais les prier d'accueillir ici tous mes sentiments de gratitude qui viennent du fond de mon coeur, en acceptant mes remerciements.

Mes premiers remerciements vont d'abord à mon directeur de thèse, le professeur Pousin Jérôme, qui m'a accompagné tout au long de ma formation. Sa disponibilité et ses généreux secours au cours de certains de mes moments difficiles ont été d'une très grande qualité, et d'un immense réconfort; merci infiniment Monsieur Pousin Jérôme.

Je remercie les rapporteurs de cette thèse Yves Bourgault et Boukhemis Ammar pour la rapidité avec laquelle ils ont lu mon manuscrit et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Merci également aux autres membres du jury qui ont accepté de juger ce travail : Emmanuel Maitre, Yves Renard. J'adresse aussi mes sincères remerciements à tous les membres du laboratoire ICJ.

# Résumé

Dans la première partie de ce travail nous considérons des problèmes hyperboliques du premier ordre linéaires ou des problèmes paraboliques linéaires dégénérés en temps. En utilisant une méthode de matrice de masse singulière, nous proposons une méthode d'éléments finis permettant d'avoir des estimations d'erreur en espace optimale pour l'élément fini de Lagrange  $P_1$  par exemple. Nous appliquons ces résultats au cas d'un système parabolique utilisé en électrocardiologie.

La seconde partie est consacrée aux polynômes  $L^p$  extrémaux à l'extérieur du cercle unité associés à une mesure de la forme générale  $\alpha = \beta_a + \beta_s + \gamma$ , où  $\beta_a$  est régulière,  $\beta_s$  singulière et  $\gamma$  discrète. Dans un premier temps nous considérons  $\beta_s = 0$ , et nous avons généralisé au cas  $L^p$  des résultats connus dans le cas  $L^2$ . Dans le cas où  $\beta_s \neq 0$  nous montrons les mêmes résultats (formules d'optimalité) mais en utilisant d'autres fonctions de régularité.

**Mots clés :** Opérateur dégénérés, Matrice de masse singulière, Estimations d'erreur, Élément finis, Comportement asymptotique, Polynômes orthogonaux,  $L^p$  extrémaux, Espace de Hardy.

# Abstract

In the first part of this work, we deal with, linear hyperbolic problems of first order or linear parabolic problems, which are degenerated with respect to the time operator. By using a singular mass matrix technique, we propose a finite element method allowing to get optimal error estimates with respect to space for the Lagrange first order finite element for example. Then our method is applied to a parabolic system degenerated with respect to time which is used in electrocardiology.

The second part of this work is dedicated to extremal polynomials in  $L^p$ , outside to the unit circle associated to a measure  $\alpha$ , with a general form given by  $\alpha = \beta_a + \beta_s + \gamma$ . The regular part is denoted  $\beta_a$ , the singular part  $\beta_s$  and the discrete part  $\gamma$ . In a first step we take  $\beta_s = 0$ , and we generalized to the  $L^p$  case the known results in the  $L^2$  case. When the singular part is non zero, by using different regularity functions, we get the same optimality formulae.

**Key words :** Degenerate operator, Singular mass matrix, Error estimates, Finite element, Asymptotic behaviour, Orthogonal polynomials,  $L^p$  extremal, Hardy space.

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	viii
<b>1</b>	<b>Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes hyperboliques</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction . . . . .	2
1.2	Existence et unicité de solutions . . . . .	2
1.3	Méthode de Petrov-Galerkin et technique de la matrice de masse singulière . . . . .	6
1.3.1	Les espaces d'éléments finis utilisés . . . . .	8
1.3.2	Estimation d'erreur en norme $L^2$ . . . . .	12
1.4	Résultats numériques . . . . .	17
1.4.1	Schémas d'Euler implicite et explicite en temps . . . . .	17
1.4.2	Résultats numériques pour un exemple jouet . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques</b>	<b>23</b>
2.1	Introduction . . . . .	24
2.2	Existence et unicité de solutions aux problèmes $\mathbf{P}_\varepsilon$ . . . . .	24
2.3	Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés . . . . .	31
2.3.1	Estimation d'erreur en norme $L^2$ . . . . .	34

---

2.3.2	Méthode d'Euler implicite et explicite . . . . .	41
2.4	Méthode du second membre modifié . . . . .	44
2.5	Analyse des difficultés d'un modèle bidomaine pour l'électrocardiologie . . . . .	48
2.5.1	Le problème semi-discretisé . . . . .	49
2.5.2	Une méthode de masse singulière pour résoudre des équations paraboliques dégénérées . . . . .	52
2.5.3	Analyse de l'erreur . . . . .	55
<b>3</b>	<b>Comportement asymptotique des polynômes <math>L^p</math> extrémaux</b>	<b>63</b>
3.1	Notations et définitions . . . . .	64
3.1.1	Comportement asymptotique . . . . .	64
3.2	Espace de Hardy . . . . .	65
3.2.1	Espace de Hardy $H^p(\Delta)$ . . . . .	65
3.2.2	Espace de Hardy $H^p(G)$ . . . . .	68
3.2.3	Produit de Blaschke . . . . .	70
3.2.4	Fonction de Szegö . . . . .	73
3.3	Espace de Hardy $H^p(G, \rho)$ . . . . .	76
3.4	Familles Normales . . . . .	77
3.5	Problèmes extrémaux dans l'espace $H^p(G, \rho)$ . . . . .	78
3.5.1	Classe de mesures $\mathfrak{S}$ . . . . .	80
3.5.2	Résultats . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Comportement asymptotique des polynômes <math>L^p</math> extrémaux en présence d'un ensemble de points de masse dénombrable</b>	<b>89</b>
4.1	Introduction . . . . .	90
4.2	Rappels des mesures et problèmes extrémaux . . . . .	91
4.2.1	Mesure complexe . . . . .	91

---

4.2.2	Mesure singulière . . . . .	92
4.2.3	Théorème de Radon-Nikodym . . . . .	92
4.2.4	Problèmes extrémaux associés à la mesure $\alpha$ . . . . .	93
4.3	Extension du lemme de Keldysh . . . . .	94
4.3.1	Lemme de Keldysh . . . . .	95
4.3.2	Généralisation du lemme de Keldysh au cas d'un nombre fini de points . . . . .	95
4.3.3	Extension du lemme de Keldysh au cas d'un nombre infini de points . . . . .	96
4.4	Classe de mesures $\mathfrak{G}$ . . . . .	99
4.5	Conclusion . . . . .	106





# Table des figures

1.1	Norme discrète $L^2$ de l'erreur en fonction du pas $h$ du maillage, $dt = 10^{-4}$ . . . . .	20
1.2	Norme discrète $L^2$ de l'erreur en fonction du pas $dt$ par la méthode d'Euler explicite, $h = \frac{1}{2}10^{-2}$ . . . . .	21
2.1	La solution approchée . . . . .	42
2.2	Erreurs en norme $L^2$ par la méthode d'Euler implicite. . . . .	43
2.3	Erreurs en norme $L^2$ par la méthode d'Euler explicite. . . . .	43
2.4	Erreurs en norme $L^\infty$ la méthode d'Euler avec une second membre modifié. (a) méthode explicite, (b) méthode implicite. . . . .	47
2.5	Erreurs en norme $L^\infty$ par la méthode d'Euler implicite avec une matrice de masse singulière, avec $h = 5.10^{-3}$ , $\delta t = 10^{-4}$ et $h^2 \ln(h) = 1.2 \times 10^{-4}$ . . . . .	47
2.6	La solution approchée . . . . .	51
2.7	La solution exacte . . . . .	52
2.8	Erreurs en norme $L^\infty$ avec des conditions de dirichlet. . . . .	55
2.9	Erreurs en norme $L^\infty$ avec des conditions de Neumann non homogènes. . . . .	55

## TABLE DES FIGURES

---

# Introduction

## 0.1 Introduction

Dans la première partie de ce travail, nous nous intéressons où des problèmes de perturbations singulières pour le transport par convection ou par diffusion. Soit  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  le domaine espace temps que nous considérons. Nous définissons la fonction  $\epsilon$  par :

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1; & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0; & \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases}$$

et nous introduisons les domaines  $\Omega_1 = (0, \frac{1}{2}) \times (0, 1)$ ,  $\Omega_2 = (\frac{1}{2}, 1) \times (0, 1)$ . Soit  $f = \begin{cases} f_1(x, t); & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ f(x); & \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases}$  et  $u_0$  donnés, nous cherchons alors  $u$  solution du problème :

$$(\mathbf{T}_0) \begin{cases} \epsilon(x) \partial_t u(x, t) + \partial_x u(x, t) + u(x, t) = f(x, t) & \text{dans } \Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x) & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ u(0, t) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

ou  $u$  solution du problème :

$$(\mathbf{P}_0) \begin{cases} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \partial_t u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = f(x, t) & \text{dans } \Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x); & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0; & 0 < t < 1 \end{cases} \quad (2)$$

L'objectif de cette étude est de proposer une méthode numérique performante pour les problèmes  $(\mathbf{T}_0)$  ou  $(\mathbf{P}_0)$ .

En nous inspirant de la technique de la matrice de masse singulière introduite pour résoudre des problèmes de contact unilatéral, nous proposons une méthode de matrice de masse singulière qui permet pour les problèmes  $(\mathbf{T}_0)$  ou  $(\mathbf{P}_0)$  d'avoir des estimations d'erreur optimales lorsque les problèmes sont semi-discrétisés en espace.

Numériquement nous vérifions que les estimations d'erreur pour les problèmes complètement dicrétisés sont optimales en espace et en temps. Enfin pour le problème  $(\mathbf{P}_0)$ , nous montrons que la projection, de la solution semi-discrétisée en

## 0.1 Introduction

---

espace, sur les éléments finis de Lagrange  $P_1$  converge vers la solution exacte du problème continu. A notre connaissance, ce résultat est nouveau pour ce type de méthode.

Mentionnons finalement l'application de notre technique pour résoudre un problème du type de l'électrocinétique cardiaque simplifié. Notons que les résultats obtenus pour le problème  $(\mathbf{T}_0)$  ont été présentés dans l'article [7].

Dans la deuxième partie de ce travail, le comportement asymptotique des polynômes  $L^p$  extrémaux constitue un lieu de rencontre privilégié pour diverses disciplines des mathématiques. Les polynômes  $L^p$  extrémaux forment une classe assez particulière de polynômes. Ils doivent cette particularité au fait qu'ils sont solutions de certains problèmes extrémaux posés dans  $L^p$ , ( $p > 0$ ).

Soit  $\alpha$  une mesure positive finie et non discrète de support  $F$  définie sur la tribu borélienne  $\mathcal{B}(\mathbb{C})$  de  $\mathbb{C}$ . Par l'appellation polynômes  $L^p$  extrémaux on désignera les polynômes notés  $P_{n,p,\alpha}$  qui sont solutions optimales de problèmes extrémaux posés dans l'espaces  $L^p(\alpha, \mathbb{C})$ . Si on note par  $m_{n,p}(\alpha)$  les constantes extrémales associées à  $\alpha$  et  $F$ , on obtient

$$m_{n,p}(\alpha) = \|P_{n,p,\alpha}\|_{L^p(\alpha,F)} = \inf_{Q_n \in \mathbb{P}_{n,1}} \{\|Q_n\|_{L^p(\alpha,F)}\}, \quad (3)$$

où  $\mathbb{P}_{n,1}$  l'ensemble des polynômes normalisés  $Q_n(z)$  c'est-à-dire

$$Q_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0; \quad a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Le cas  $p = 2$  correspond au cas très connu des polynômes orthogonaux normalisés  $P_{n,2,\alpha}$  associés à la mesure  $\alpha$ . Les conditions d'orthogonalité étant :

$$\int_F P_{n,2,\alpha}(z) \overline{P_{k,2,\alpha}(z)} d\alpha(z) = \lambda_n \delta_{n,k}; \quad \lambda_n \neq 0, \quad n, k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

En explicitant la mesure  $\alpha$  et son support  $F$ , on retrouve beaucoup de systèmes de polynômes orthogonaux ( Legendre, Chebyshev, Laguerre, Hermite, polynômes orthogonaux sur le cercle unité, le segment ... ).

## TABLE DES FIGURES

---

Un des problèmes fondamentaux de la théorie des polynômes orthogonaux ou  $L^p$  extrémaux est celui qui étudie le comportement asymptotique lorsque  $n$  devient grand. Il intervient de façon significative dans la résolution de problèmes mathématiques ( analyse de la distribution des zéros des polynômes, théorie spectrale, étude de la convergence des approximations de Padé, interpolation polynômiale et représentation des fonctions analytiques par des séries de polynômes ). Parmi les méthodes actuelles utilisées pour résoudre ces problèmes on peut citer celles basées sur l'étude approfondie de problèmes extrémaux dans des espaces de Hardy de fonctions holomorphes et sur la théorie du potentiel logarithmique complexe. Ces méthodes ont été initiées et développées d'un côté par l'école russe : Smirnov [44, 45], Geronimus [19, 20], Kaliaguine [24, 25] et de l'autre par l'école américaine : Szegö [47], Widom [51], Nevai [35], ...

Le cas particulier  $p = 2$ , de ce problème a été largement étudié par plusieurs auteurs, mais c'est à Szegö [47] et à Bernstein [10] qu'on doit une méthode générale d'étude du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux sur le cercle unité avec une fonction poids relativement arbitraire. Il faut noter que la méthode de Szegö est aussi à la base de l'étude du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux associés à des mesures concentrées sur des ensembles autres que le cercle. D'autres mathématiciens se sont aussi intéressés à l'étude du comportement asymptotique des polynômes orthogonaux en général comme Smirnov [44, 45], Geronimus [19, 20], Souetine [46], Widom [51], Kaliaguine [24, 25], Marcellan [8], Van Assche [48, 49]...

Dans le travail qui suit on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique des polynômes  $L^p$  extrémaux  $P_{n,p,\alpha}$  associés à une mesure  $\alpha$  du type :

$$\alpha = \beta + \gamma, \tag{6}$$

où  $\alpha$  est concentré sur le cercle unité plus une partie discrète infinie.

Notre travail s'est inspiré et généralise les résultats obtenus par les auteurs

## 0.1 Introduction

---

suivant : Geronimus [19], qui a étudié le problème du comportement asymptotique des polynômes  $L^p$  extrémaux  $P_{n,p,\alpha}$  ( $0 < p < \infty$ ), dans le cas  $\alpha = \beta_a$  avec la mesure  $\beta_a$  concentrée sur un contour. Kaliaguine [24] qui a considéré le cas d'une mesure  $\alpha$  concentrée sur un contour de Jordan rectifiable assez régulier plus une partie discrète finie

$$\alpha = \beta_a + \gamma \tag{7}$$

où  $\beta_a$  une partie absolument continue satisfaisant la condition de Szegő et  $\gamma = \sum_{k=1}^l A_k \delta_{z_k}$  concentrée sur un ensemble fini de points  $\{z_k\}_{k=1}^l$  situé à l'extérieur du contour. Benzine [9] a aussi considéré le cas d'une mesure  $\alpha$  concentrée sur un contour de Jordan rectifiable assez régulier mais plus une partie discrète infinie et dans le cas particulier  $p = 2$  des polynômes orthogonaux  $P_{n,2,\alpha}$ .

Nous nous sommes aussi inspirés des travaux de Peherstorfer, Yuditskii [39] et Bello Hernandez, Marcellan et Minguéz [8] pour arriver à la formule asymptotique souhaitée des polynômes  $L^p$  extrémaux  $P_{n,p,\alpha}$ .

Le chapitre III est consacré à l'étude du comportement asymptotique des polynômes  $L^p$  extrémaux notés  $T_{n,p}$  associés à une mesure concentrée sur le cercle  $\Gamma$  ainsi que sur un nombre infini de points se trouvant à l'extérieur du cercle.

On y introduit les notions essentielles nécessaires pour notre travail. On donne la définition des polynômes  $L^p$  extrémaux associés à une mesure donnée ainsi que la notation du comportement asymptotique de ces polynômes. On y introduit l'espace fonctionnel de base et on exhibe tous les outils fonctionnels nécessaires ainsi que leurs propriétés [27, 43]. On introduit aussi le produit de Blaschke  $B(z)$  construit sur les zéros de fonctions appartenant à certains sous-ensembles de fonctions holomorphes noté  $H(\Delta)$  qui sont définies par des propriétés de croissance, et on construit explicitement la fonction de Szegő associée au disque unité ouvert  $\Delta$  qui, elle aussi, est à la base de définition de la fonction de Szegő associée à l'extérieur du disque unité ouvert.



## TABLE DES FIGURES

---

La fonction de Szegö  $\mathcal{D}_G$  va permettre d'introduire l'espace fonctionnel de base pour l'étude du comportement asymptotique des polynômes  $L^p$  extrémaux  $T_{n,p}$  : c'est l'espace de Hardy  $H^p(G, \rho)$  associé à l'extérieur du disque unité  $G$  et à la fonction poids  $\rho$ . On énoncera à cet effet l'essentiel de ses caractéristiques. La notion de familles normales ( ou de Montel ) est introduite pour définir la convergence sur les sous-ensembles compacts de  $\mathbb{C}$  pour pouvoir étudier les passages à la limite des fonctions holomorphes. Les problèmes extrémaux dans l'espace de Hardy  $H^p(G, \rho)$  sont enfin présentés, on définit aussi la classe de mesures  $\mathfrak{S}$  à l'aide de laquelle on étudie le comportement asymptotique des polynômes  $L^p$  extrémaux ( $p > 0$ ). Ces mesures sont du type (7). Il est à souligner que la difficulté à ce niveau du travail était de choisir une mesure  $\alpha$  ne satisfaisant que des conditions naturelles. Les résultats obtenus ont été présentés dans [4] et [5].

Au chapitre suivant on étudie le comportement asymptotique des polynômes  $P_{n,p,\alpha}$   $L^p$  extrémaux à l'extérieur du cercle unité  $\Gamma$  associé à une mesure sous la forme  $\alpha = \beta + \gamma = \beta_a + \beta_s + \gamma$ , où  $\beta_a$  la partie absolument continue de  $\beta$  vérifie la condition de Szegö avec  $\text{supp}(\beta_a) = \Gamma$ ,  $\beta_s$  la partie singulière de  $\beta$  avec  $\text{supp}(\beta_s) \subset \Gamma$  et  $\gamma$  une mesure discrète concentrée sur un nombre infini des points  $\{z_k\}_{k=1}^\infty$  situés à l'extérieur du cercle unité. Quelques rappels sur les mesures et les problèmes extrémaux dans l'espace de Hardy  $H^p(G, \rho)$  sont présentés qui sont essentiels pour ce chapitre.

On donne ensuite le lemme de Keldysh ainsi que quelques-unes de ses extensions qui nous seront utiles dans l'élaboration des formules asymptotiques dans le cas  $0 < p < 1$ . On définit la classe de mesures que l'on notera  $\mathfrak{G}$ . Ce sont des mesures du type (6), où  $\beta = \beta_a + \beta_s$  et à l'aide desquelles on étudiera le comportement asymptotique des polynômes  $L^p$  extrémaux  $P_{n,p,\alpha}$  dont le résultat fera l'objet du théorème 4.4.3.

# Chapitre 1

## Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes hyperboliques

## 1.1 Introduction

Une méthode de réduction d'ordre en espace est proposée pour traiter le cas d'un opérateur de transport dégénéré, c'est-à-dire le cas où les coefficients de l'opérateur du transport peuvent s'annuler. La méthode présentée est inspirée de la dynamique singulière introduite dans [41]. Nous considérons le cas unidimensionnel où un coefficient s'annule sur un seul intervalle par souci de simplicité. Notons que le modèle que nous considérons est utilisé en dynamique des populations dans le cas d'une dynamique lente-rapide [2], ou pour des problèmes de modélisation de plantes en biologie [11]. Lorsque le coefficient devant l'opérateur en temps dans l'équation du transport s'annule, il est bien connu que cela pose des problèmes d'oscillations dans un voisinage de la zone où il s'annule. On pourra consulter, par exemple [18] p. 115 où une méthode des moindres carrés est utilisée pour résoudre l'équation du transport dégénérée.

Il s'agit donc, pour  $f = \begin{cases} f_1(x, t) & 0 < x < \frac{1}{2} \\ f(x) & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$  et  $u_0$  donnés, en définissant  $\Omega_1 = (0, \frac{1}{2}) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (\frac{1}{2}, 1) \times (0, 1)$ , de calculer  $u$  solution de :

$$(\mathbf{T}) \begin{cases} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \partial_t u(x, t) + \partial_x u(x, t) + u(x, t) = f(x, t) & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ u(x, 0) = u_0(x); \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad u(0, t) = 0; \quad 0 < t < 1. \end{cases} \quad (1.1)$$

A la section suivante, nous montrons l'existence et l'unicité de solutions au problème (T).

## 1.2 Existence et unicité de solutions

Définissons  $\partial\Omega_-$  la frontière entrante du domaine par :

$$\partial\Omega_- = \{(x, t) \in \Omega : (x, t) \in \{0\} \times (0, 1) \cup (0, \frac{1}{2}) \times \{0\}\},$$

## 1.2 Existence et unicité de solutions

---

et notons par  $\mathcal{A}$  l'opérateur différentiel défini par :

$$\varphi \mapsto \mathcal{A}\varphi = 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \partial_t \varphi + \partial_x \varphi + \varphi.$$

La norme du graphe associée à l'opérateur  $\mathcal{A}$  est notée  $|||\cdot|||$  et est définie par :

$$|||\varphi|||^2 = \|\mathcal{A}\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

L'espace fonctionnel  $\mathcal{H}$  est défini comme la fermeture pour la norme  $|||\cdot|||$  du sous espace fermé des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  à support compacte dans  $\overline{\Omega}$  ayant une trace nulle sur  $\partial\Omega_-$  :

$$\mathcal{H} = \overline{\{\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}); \varphi|_{\partial\Omega_-} = 0\}}^{|||\varphi|||}.$$

Dans la suite de ce travail, nous utiliserons la forme bilinéaire  $a$  associée à l'opérateur  $\mathcal{A}$  et définie par :

$$\begin{aligned} a: \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto a(u, v) = \int_{\Omega} \mathcal{A}u \cdot v dx dt. \end{aligned}$$

Donnons maintenant un résultat technique :

**Lemme 1.2.1.**

$$\forall v \in \mathcal{H}: \quad a(v, v) \geq \|v\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (1.2)$$

**Preuve.**

Pour  $v \in \mathcal{H}$  nous avons :

$$\begin{aligned} a(v, v) &= (\mathcal{A}v, v) = \int_{\Omega} \mathcal{A}v \cdot v dx dt \\ &= \int_{\Omega} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \partial_t v \cdot v + \partial_x v \cdot v + v^2 dx dt \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \partial_t v^2 dx dt + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \partial_x v^2 dx dt + \int_{\Omega} v^2 dx dt. \end{aligned}$$

Soit encore

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{2} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \partial_t v^2 dx dt &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \partial_t v^2 dt dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) v^2(x, 1) dx - \int_0^1 \frac{1}{2} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) v^2(x, 0) dx, \end{aligned}$$

## Chapitre 1. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes hyperboliques

---

et de même

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{1}{2} \partial_x v^2 dx dt &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} \partial_x v^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 v^2(1, t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 v(0, t) dt.\end{aligned}$$

Puisque  $v(x, 0) = 0$  pour  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ , et  $v(0, t) = 0$  pour  $0 \leq t \leq 1$  il vient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \partial_t v^2 dx dt &\geq 0, \\ \int_{\Omega} \partial_x v^2 dx dt &\geq 0.\end{aligned}$$

On déduit alors :

$$a(v, v) = \int_{\Omega} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \partial_t v \cdot v + \partial_x v \cdot v + v^2 dx dt \geq \|v\|_{L^2(\Omega)}^2; \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

□

Maintenant, nous voulons montrer l'existence et l'unicité de solutions au problème (T). Pour cela montrons quelques propriétés de l'opérateur  $\mathcal{A}$ .

**Lemme 1.2.2.**  $\mathcal{A} : \mathcal{H} \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$  est un opérateur linéaire continu, à image fermé, et injectif.

**Preuve.**

Soit  $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$  une suite telle que

$$\|\mathcal{A}u_n - w\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

montrons que :

$$\exists u \in \mathcal{H} \text{ tel que } u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \text{ et } \mathcal{A}u = w.$$

On a :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u_m\|_{L^2(\Omega)} &= \|\mathcal{A}(u_n - u_m)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \sup_{\substack{w \in L^2(\Omega) \\ w \neq 0}} (\mathcal{A}(u_n - u_m), w) \\ &\geq \|u_n - u_m\|_{L^2(\Omega)}^2,\end{aligned}$$

## 1.2 Existence et unicité de solutions

---

donc  $\{u_n\}$  est une suite de *Cauchy* dans  $L^2(\Omega)$  ce qui implique l'existence de  $u$  tel que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ . L'injection  $L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  nous assure que cette suite converge au sens des distributions. Pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  nous avons d'après le lemme 1.2.1 :

$$\left| \int_{\Omega} (\mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u) \varphi dx dt \right| \leq \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Nous en déduisons  $\mathcal{A}u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}u$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . Par ailleurs,

$$\mathcal{A}u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w \text{ dans } L^2(\Omega),$$

donc dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . L'unicité de la limite dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  permet de conclure que  $\mathcal{A}u = w$  dans  $L^2(\Omega)$ .

Montrons maintenant que  $\mathcal{A}$  est injectif, soit  $u \in \mathcal{H}$  avec  $\|u\| = 1$  alors :

$$\|\mathcal{A}u\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{w \in L^2(\Omega), \|w\|_{L^2(\Omega)}=1} (\mathcal{A}u, w).$$

Par ailleurs,

$$\sup_{w \in L^2(\Omega), \|w\|_{L^2(\Omega)}=1} (\mathcal{A}u, w) \geq \frac{(\mathcal{A}u, u)}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \geq 1.$$

Si  $\mathcal{A}u = 0$  alors  $u = 0$ .  $\square$

**Lemme 1.2.3.** *L'adjoint de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}^*$  vérifie :*

$$\text{Ker}(\mathcal{A}^*) = \{0\}. \tag{1.3}$$

**Preuve.**

Soit  $g \in \text{Ker}(\mathcal{A}^*)$ , alors pour tout  $u \in \mathcal{H}$  :

$$(\mathcal{A}^*g, u) = 0.$$

Comme  $g \in \mathcal{H}$ , nous en déduisons que  $(\mathcal{A}^*g, g) = 0$ . En raisonnant comme au lemme 1.2.1 nous avons :

$$0 = (\mathcal{A}^*g, g) \geq \|g\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

$\square$

**Théorème 1.2.4.**

*Pour  $f$  une fonction régulière donnée, il existe une unique  $u \in \mathcal{H}$  solution du problème  $(\mathbf{T})$ .*

**Preuve.**

Le théorème de l'image fermée de Banach permet d'écrire :

$$Im(\mathcal{A}) = (Ker(\mathcal{A}^*))^\perp = L^2(\Omega).$$

Cela montre que  $\mathcal{A}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{H}$  dans  $L^2(\Omega)$ .  $\square$

### 1.3 Méthode de Petrov-Galerkin et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

Pour le problème  $(\mathbf{T})$  nous introduisons une semi-discrétisation à l'aide d'éléments finis en espace. Puis nous appliquons la méthode de la matrice de masse singulière. La méthode de la matrice de masse singulière consiste à remplacer la quantité  $\partial_t u$  par une projection dans un autre sous espace différent de l'espace dans lequel  $u$  est recherché. La projection est au sens de  $L^2$ . Dans ce qui suit, commençons par introduire une formulation mixte du problème  $(\mathbf{T})$ . Définissons les espaces :

$$V = \{ \varphi \in H^1(0,1); \varphi(0) = 0 \}, \quad H = L^2(0,1).$$

Introduisons les formes bilinéaires  $a(\cdot, \cdot)$  définie sur  $V \times H$  et  $b(\cdot, \cdot)$  définie sur  $V \times L^2(0, \frac{1}{2})$  par :

$$a(v, w) = \int_0^1 \partial_x v(x) w(x) + v(x) w(x) dx, \quad (1.4)$$

### 1.3 Méthode de Petrov-Galerkin et technique de la matrice de masse singulière

---

$$b(v, \varphi) = \int_0^{\frac{1}{2}} w(x) \varphi(x) dx. \quad (1.5)$$

Dans ce qui suit, l'opérateur de restriction est défini.

**Lemme 1.3.1.** *L'opérateur  $B : V \rightarrow L^2(0, \frac{1}{2})'$  associé à la forme bilinéaire  $b(\cdot, \cdot)$  est l'opérateur linéaire continu de restriction au segment  $[0, \frac{1}{2}]$ . Nous avons  $\text{Ker}(B) = {}_0H^1(\frac{1}{2}, 1)$  et l'image de son adjoint est donnée par  $\text{Im}(B^*) = {}_0H^1(0, \frac{1}{2})$  où l'indice 0 indique que seules les fonctions s'annulant en la borne inférieure de l'intervalle sont considérées.*

Maintenant introduisons une formulation variationnelle pour le problème (T). Nous notons aussi par  $B$  l'opérateur de restriction de  $H$  dans  $L^2(0, \frac{1}{2})$ .

$$\begin{cases} \text{trouver } u(t) \in C^0([0, 1]; V); & u(0) = u_0, \quad \text{satisfaisant :} \\ < B\dot{u}(t), Bw >_{L^2(0, \frac{1}{2})', L^2(0, \frac{1}{2})} + a(u(t), w) = (f(t), w); & \forall w \in H, \end{cases} \quad (1.6)$$

où  $\dot{u}$  représente la dérivée par rapport au temps. Décomposons l'espace  $V$  comme :

$$V = \text{Ker}(B) \oplus (\text{Ker}(B))^\perp = \text{Ker}(B) \oplus \text{Im}(B^*).$$

La forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  vérifie les conditions inf-sup et nous en déduisons que le problème (1.6) est bien posé. En effet, soit  $u \in V$  alors il existe  $c > 0$  tel que :

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_0^1 \partial_x u(x) u(x) dx + \int_0^1 u^2(x) dx, \\ &\geq c \|u\|_{L^2(0,1)}^2. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, il est clair que pour tout  $u$  dans  $V$ ,

$$\sup_{w \in L^2(0,1)} \frac{a(u, w)}{\|w\|_{L^2(0,1)}} \geq \frac{a(u, u)}{\|u\|_{L^2(0,1)}} \geq c \|u\|_{L^2(0,1)}, \quad (1.7)$$

d'où nous déduisons l'inégalité

$$\inf_{u \in V, u \neq 0} \sup_{w \in L^2(0,1), w \neq 0} \frac{a(u, w)}{\|w\|_{L^2(0,1)} \|u\|_V} \geq c. \quad (1.8)$$



### 1.3.1 Les espaces d'éléments finis utilisés

Pour approcher à l'aide d'une méthode d'éléments finis une équation de transport, nous utilisons une méthode de *Petrov-Galerkin* c'est-à-dire que les fonctions tests ne sont pas choisies dans le même espace que celui pour la fonction inconnue. La construction d'une méthode d'élément finis, nécessite la donnée d'un maillage, de noeuds et d'un espace de polynômes, qui doivent être choisis de manière cohérente. Nous avons choisi les éléments finis de type Lagrange, qui font intervenir comme "degrés de liberté" les valeurs de la fonction aux noeuds. Nous considérons le segment  $(0, 1)$  et notre but est d'introduire un espace d'approximation des fonctions définies sur  $(0, 1)$ , ayant une base très simple de sorte que toute fonction dans  $\mathcal{C}^0(0, 1)$  se décompose facilement sur cette base. Nous commençons par l'espace associé à l'élément fini appelé  $P_1$ . Soit  $m \in \mathbb{N}$  fixé, posons  $M = 2m$ ,  $h = \frac{1}{2m}$  et définissons  $x_i = ih$ , pour  $0 \leq i \leq M$ . Nous avons la partition de  $[0, 1]$  où  $x = \frac{1}{2}$  est un point de celle-ci :

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{M-1} < x_M. \quad (1.9)$$

Nous notons  $P_1$  l'espace des polynômes de degré plus petit ou égal à 1 :

$$P_1 = \{p : p(x) = ax + b; \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Nous introduisons alors l'espace d'approximation  $V_h$  défini par :

$$V_h = \{w \in \mathcal{C}^0(0, 1) : w|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1, \ w(0) = 0; \ 0 \leq i \leq M-1\}. \quad (1.10)$$

L'espace  $V_h$ , défini par (1.10), est un espace vectoriel et une base de cet espace est donnée par les fonctions  $\varphi_i$ ,  $1 \leq i \leq M$ , telles que  $\varphi_i \in V_h$  et  $\varphi_i(x_k) = \delta_{i,k}$  (où  $\delta$  désigne le symbole de *Kronecker*). Ainsi,

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

### 1.3 Méthode de Petrov-Galerkin et technique de la matrice de masse singulière

---

La méthode des éléments finis permet de construire différents espaces d'approximation, suivant l'élément fini utilisé. Soit  $P_0$  l'espace des polynômes de degré 0 ( il s'agit donc des fonctions constantes ). Pour la partition donnée en (1.9), nous considérons l'espace d'approximation suivant :

$$\mathcal{M}_h = \{w \in L^2(0, \frac{1}{2}) : w|_{]x_i, x_{i+1}[} \in P_0, \ 0 \leq i \leq m-1\}. \quad (1.11)$$

Étant donnée la partition (1.9) de  $[0, 1]$ , l'espace d'approximation  $H_h$  est défini par :

$$H_h = \{w \in H : w|_{]x_i, x_{i+1}[} \in P_0, \ 0 \leq i \leq M-1\}. \quad (1.12)$$

Finalement l'espace  $H_h$  utilisé dans l'approximation de *Petrov-Galerkin* est celui engendré par des fonctions notées  $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_M$  et définies par :

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On cherche une approximation de la solution du problème (1.1) dans l'espace  $V_h$ , et on choisit comme fonction test les fonctions de base de  $H_h$ . Soit maintenant  $\mathcal{M}_h = \text{vect}\{\psi_i\}; i = 1, \dots, m$  un sous espace de  $L^2(0, \frac{1}{2})$  où, les  $\psi_i$  sont  $P_0$  sur chaque intervalle de la partition (1.9) restreinte à  $(0, \frac{1}{2})$ . Le problème approché que nous considérons s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, v_h) \in V_h \times \mathcal{M}_h : \\ (1_{[0, \frac{1}{2}]}(x)v_h, w_h) + a(u_h, w_h) = (f(t), w_h); & \forall w_h \in H_h, \\ (v_h, q_h) = (\partial_t u_h, q_h); & \forall q_h \in \mathcal{M}_h. \end{cases} \quad (1.13)$$

Dans la suite, on appelle  $V_h$  l'espace d'approximation, et  $H_h$  l'espace des fonctions tests. Si  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M$  est une base de  $V_h$ , et  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$  une base de  $\mathcal{M}_h$ , en développant  $u_h$  sur la base de  $V_h$ , et  $v_h$  sur la base de  $\mathcal{M}_h$ , nous pouvons écrire :

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^M u_j(t) \varphi_j(x), \quad v_h(x, t) = \sum_{k=1}^m v_k(t) \psi_k(x). \quad (1.14)$$

## Chapitre 1. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes hyperboliques

---

Nous injectons ces expressions respectivement dans les formules (1.13). On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \sum_{k=1}^m 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) v_k(t) \psi_k(x) w_h(x) dx + \int_0^1 \sum_{j=1}^M u_j(t) \partial_x \varphi_j(x) w_h(x) dx \\ \quad + \int_0^1 \sum_{j=1}^M u_j(t) \varphi_j(x) w_h(x) dx = (f(t), w_h(x)); \quad \forall w_h \in H_h, \\ \int_0^1 \sum_{k=1}^m v_k(t) \psi_k(x) q_h(x) dx = \int_0^1 \sum_{j=1}^M \dot{u}_j(t) \varphi_j(x) q_h(x) dx; \quad \forall q_h \in \mathcal{M}_h. \end{array} \right.$$

Choisissons  $w_h(x) = \tilde{\varphi}_i$  et  $q_h(x) = \psi_l$ , alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m v_k(t) \int_0^1 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \psi_k(x) \tilde{\varphi}_i(x) dx + \sum_{j=1}^M u_j(t) a(\varphi_j, \tilde{\varphi}_i) = (f(t), \tilde{\varphi}_i); \quad \forall \tilde{\varphi}_i \in H_h, \\ \sum_{k=1}^m v_k(t) \int_0^1 \psi_k(x) \psi_l(x) dx = \sum_{j=1}^M \dot{u}_j(t) \int_0^1 \varphi_j(x) \psi_l(x) dx; \quad \forall \psi_l \in \mathcal{M}_h. \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Définissons maintenant les matrices liées aux opérateurs différentiels :

$$\begin{aligned} B_{1ki} &= \int_0^1 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \psi_k(x) \tilde{\varphi}_i(x) dx; & 0 \leq k \leq m, \quad 0 \leq i \leq M, \\ B_{2lj} &= \int_0^1 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \varphi_j(x) \psi_l(x) dx; & 0 \leq l \leq m, \quad 0 \leq j \leq M, \\ A_{ij} &= \int_0^1 \partial_x \varphi_j(x) \tilde{\varphi}_i(x) + \varphi_j(x) \tilde{\varphi}_i(x) dx; & 0 \leq i, j \leq M, \\ C_{lk} &= \int_0^1 \psi_k(x) \psi_l(x) dx; & 0 \leq l, k \leq m. \end{aligned}$$

Introduisons  $P_{H_h} : H \longrightarrow H_h$  un projecteur au sens  $L^2$ , et définissons  $F(t) = P_{H_h} f(t)$ . Pour  $u_0 \in V_h$  donné la forme matricielle du système (1.13) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1^t v_h(t) + A u_h(t) = F(t); \quad \forall t \in ]0, 1], \\ C v_h(t) = B_2 \dot{u}_h(t); \quad \forall t \in ]0, 1], \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (1.16)$$

L'approximation des éléments de la matrice  $B_1$  par une formule d'intégration numérique ou par projection représente exactement les éléments de la matrice

### 1.3 Méthode de Petrov-Galerkin et technique de la matrice de masse singulière

---

$B_2$ . Cela nous permettra de proposer un schéma explicite en temps à la section suivante.

En effet, définissons  $\Theta_h$  l'opérateur d'interpolation de  $V_h$  dans  $H_h$  par :

$$\Theta_h(w) = \sum_{i=1}^M w(x_{i-1}) 1_{[x_{i-1}, x_i[}(x).$$

Il est facile de montrer que [14] :

$$\forall w \in H_0^1(0,1); \quad \|w - \Theta_h w\|_{L^2(0,1)} \leq Ch \|w'\|_{L^2(0,1)}.$$

Remarquons que :

$$B_2 = h \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = h \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, si nous approchons  $B_2$  par  $B_1$ , ce qui revient à mettre sur la diagonale par bloc la somme des termes sur chaque ligne, nous commettons une erreur de l'ordre de  $h$ .

Nous avons :

$$B_{1ki} = \int_0^1 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \psi_k(x) \tilde{\varphi}_i(x) dx = \int_0^1 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \psi_k(x) \Theta_h \varphi_i(x) dx.$$

Comme il est usuel de le faire pour l'équation de la chaleur nous travaillerons avec une matrice  $B = B_2$  approchée.

Le système matriciel (1.16) devient :

$$\begin{cases} B^t v_h(t) + A u_h(t) = F(t); & \forall t \in ]0, 1], \\ C v_h(t) = B \dot{u}_h(t); & \forall t \in ]0, 1], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1.17)$$

**Remarque 1.3.2.** *Nous aurions pu utiliser une méthode décentrée (voir par exemple [3]). L'espace  $H_h$  est alors défini avec des polynômes de degré 2, évidemment les deux espaces  $V_h$  et  $H_h$  sont de même dimension finie.*

### 1.3.2 Estimation d'erreur en norme $L^2$

La question qui se pose maintenant est de savoir si  $u_h$  est une bonne approximation de  $u$ . Introduisons  $P_{V_h} : \mathcal{C}^1([0, 1]) \longrightarrow V_h$  l'opérateur d'interpolation de Lagrange,  $\Pi_h \in \mathcal{L}(H^1(0, 1), \mathcal{M}_h)$  un projecteur au sens de  $L^2$  et  $P_{H_h} \in \mathcal{L}(L^2(0, 1), H_h)$  un projecteur au sens de  $L^2$ .

**Théorème 1.3.3.** *Pour  $u_0 = 0$ ,  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  donnés, et supposons que  $u(t) \in \mathcal{C}^1([0, 1], H^2(0, 1)) \cap \mathcal{H}$ , alors il existe  $C(f) > 0$  telle que pour tout  $h > 0$ , nous avons l'estimation d'erreur suivante :*

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(f)h; \quad 0 < t \leq 1. \quad (1.18)$$

Pour la preuve, nous avons besoin d'estimations a priori.

**Lemme 1.3.4.** *Il existe  $C_1, C_2$  telles que pour tout  $h > 0$  les estimations suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{aligned} C_1 \|u_h\|_{L^\infty(0,1, V_h)}^2 + \|\Pi_h \dot{u}_h\|_{L^2(0,1, L^2(0, \frac{1}{2}))}^2 + \|\dot{u}_h\|_{L^2(0,1, L^2(\frac{1}{2}, 1))}^2 + \|\dot{u}_h(\frac{1}{2}, \cdot)\|_{L^2(0,t)}^2 \\ + \|P_{H_h} u_h\|_{L^\infty(0,1, L^2(0,1))}^2 \leq C_2 (\|\dot{f}\|_{L^2(0,1, L^2(0,1))}^2 + \|f\|_{L^\infty(0,1, L^2(0,1))}^2), \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\|(I - \Pi_h)P_{H_h} \dot{u}_h\|_{L^2(0,1, L^2(0,1))}^2 \leq \frac{1}{2} \|\dot{u}_h(\frac{1}{2}, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (1.20)$$

**Preuve.**

Remarquons que :

$$\Pi_h P_{H_h} = \Pi_h.$$

Le problème semi-discretisé devient :

$$(\dot{u}_h(t), \Pi_h w_h) + a(u_h(t), w_h) = (f(t), w_h); \quad \forall w_h \in H_h. \quad (1.21)$$

### 1.3 Méthode de Petrov-Galerkin et technique de la matrice de masse singulière

---

Choisissons succesivement :

$$w_h = \partial_x \dot{u}_h(t) \in H_h, \text{ et } w_h = P_{H_h} \dot{u}_h(t) \in H_h,$$

on obtient

$$(\dot{u}_h(t), \Pi_h \partial_x \dot{u}_h(t)) + a(u_h(t), \partial_x \dot{u}_h(t)) = (f(t), \partial_x \dot{u}_h(t)), \quad (1.22)$$

$$(\dot{u}_h(t), \Pi_h \dot{u}_h(t)) + a(u_h(t), P_{H_h} \dot{u}_h(t)) = (f(t), P_{H_h} \dot{u}_h(t)), \quad (1.23)$$

additionnons les deux équations (1.22), (1.23) et intégrons entre 0 et  $t$  :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^1 \dot{u}_h(s) \Pi_h \partial_x \dot{u}_h(s) dx ds + \int_0^t \int_0^1 \partial_x u_h(s) \partial_x \dot{u}_h(s) dx ds - \int_0^t \int_0^1 \partial_x u_h(s) \dot{u}_h(s) dx ds \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t (u_h^2(1, s) - u_h^2(0, s)) ds + \int_0^t \int_0^1 \dot{u}_h(s) \Pi_h \dot{u}_h(s) dx ds + \int_0^t \int_0^1 \partial_x u_h(s) P_{H_h} \dot{u}_h(s) dx ds \\ & + \int_0^t \int_0^1 u_h(s) P_{H_h} \dot{u}_h(s) dx ds = \int_0^t \int_0^1 f(s) (\partial_x \dot{u}_h(s) + P_{H_h} \dot{u}_h(s)) dx ds. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Le terme de l'équation (1.24) :

$$\int_0^t \int_0^1 u_h(s) \partial_x \dot{u}_h(s) dx ds,$$

est intégré par parties, le terme suivant :

$$- \int_0^t \int_0^1 \partial_x u_h(s) \dot{u}_h(s) dx ds,$$

sera compensé par le terme :

$$\int_0^t \int_0^1 \partial_x u_h(s) P_{H_h} \dot{u}_h(s) dx ds,$$

de la même équation puisque nous avons  $\partial_x u_h(t) \in H_h$ . On intègre par partie le second membre ( $\frac{d}{dt} P_{H_h} u_h = P_{H_h} \dot{u}_h$ ) :

$$- \int_0^t \int_0^1 \dot{f}(s) (\partial_x u_h(s) + P_{H_h} u_h(s)) dx ds + \int_0^1 f(t) (\partial_x \dot{u}_h(t) + P_{H_h} \dot{u}_h(t)) dx$$

$$- \int_0^1 f(0)(\partial_x \dot{u}_h(0) + P_{H_h} \dot{u}_h(0)) dx.$$

Pour l'estimation de  $\dot{u}_h(t)|_{(\frac{1}{2},1)}$ , on prend  $w_h = (I - \Pi_h)\psi_h$ .

On remarque que :

$$(I - \Pi_h)\psi_h|_{(0,\frac{1}{2})} = 0 \quad \text{et} \quad (I - \Pi_h)\psi_h|_{(\frac{1}{2},1)} = \psi_h; \quad \forall \psi_h \in H_h.$$

Le problème semi-discrétisé (1.21) devient :

$$a(u_h(t), (I - \Pi_h)\psi_h) = (f(t), (I - \Pi_h)\psi_h); \quad \forall \psi_h \in H_h.$$

On dérive par rapport à  $t$  et on note  $\dot{u}_h(t) = \frac{d}{dt}u_h(t)$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \partial_x \dot{u}_h(t) \psi_h + \dot{u}_h(t) \psi_h dx = 0; \quad \forall \psi_h \in H_h.$$

Choisissons  $\psi_h = \partial_x \dot{u}_h(t) \in H_h$  :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (\partial_x \dot{u}_h(t))^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \partial_x (\dot{u}_h(t))^2 dx = 0.$$

On a :

$$\|\partial_x \dot{u}_h(t)\|_{L^2(\frac{1}{2},1)}^2 + \frac{1}{2} (\dot{u}_h(1,t))^2 = \frac{1}{2} (\dot{u}_h(\frac{1}{2},t))^2$$

On intègre par rapport à  $t$  :

$$\int_0^t \|\partial_x \dot{u}_h(s)\|_{L^2(\frac{1}{2},1)}^2 ds \leq \frac{1}{2} \int_0^t (\dot{u}_h(\frac{1}{2},s))^2 ds,$$

d'où

$$\|\partial_x \dot{u}_h\|_{L^\infty(0,t;L^2(\frac{1}{2},1))}^2 \leq \|\dot{u}_h(\frac{1}{2},\cdot)\|_{L^2(0,t)}^2.$$

On utilise l'inégalité de Young nous déduisons ainsi l'estimation (1.19). Pour la seconde estimation (1.20), choisissons :

$$w_h = (I - \Pi_h)\psi_h \quad \text{pour} \quad \psi_h \in H_h.$$

Nous avons :

$$a(u_h(t), (I - \Pi_h)\psi_h) = (f(t), (I - \Pi_h)\psi_h). \quad (1.25)$$

### 1.3 Méthode de Petrov-Galerkin et technique de la matrice de masse singulière

---

On dérive (1.25) par rapport à  $t$ . Nous avons :

$$a(\dot{u}_h(t), (I - \Pi_h)\psi_h) = 0; \quad \forall \psi_h \in H_h. \quad (1.26)$$

Puisque  $f$  ne dépend pas du temps pour  $x > \frac{1}{2}$ . On prend  $\psi_h = P_{H_h}\dot{u}_h(t)$  et utilisant la définition du projecteur  $L^2$  de  $P_{H_h}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \partial_x \dot{u}_h(t) (I - \Pi_h) P_{H_h} \dot{u}_h(t) dx + \int_0^1 \dot{u}_h(t) (I - \Pi_h) P_{H_h} \dot{u}_h(t) dx \\ &= \int_0^1 \partial_x \dot{u}_h(t) (I - \Pi_h) \dot{u}_h(t) dx + \int_0^1 P_{H_h} \dot{u}_h(t) (I - \Pi_h) P_{H_h} \dot{u}_h(t) dx = 0, \end{aligned} \quad (1.27)$$

Ensuite,

$$\int_0^1 P_{H_h} \dot{u}_h(t) (I - \Pi_h) P_{H_h} \dot{u}_h(t) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (P_{H_h} \dot{u}_h(t))^2 dx = \int_0^1 ((I - \Pi_h) P_{H_h} \dot{u}_h(t))^2 dx, \quad (1.28)$$

avec

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (I - \Pi_h) \dot{u}_h(t) q_h dx = 0; \quad \forall q_h \in H_h|_{[0, \frac{1}{2}]}, \quad (1.29)$$

et

$$\int_0^1 \partial_x \dot{u}_h(t) (I - \Pi_h) \dot{u}_h(t) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \partial_x \dot{u}_h(t) \dot{u}_h(t) dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{d}{dx} (\dot{u}_h(t))^2 dx, \quad (1.30)$$

alors

$$\int_0^1 \partial_x \dot{u}_h(t) (I - \Pi_h) \dot{u}_h(t) dx = \frac{1}{2} (\dot{u}_h(1, \cdot))^2 - (\dot{u}_h(\frac{1}{2}, \cdot))^2, \quad (1.31)$$

d'où

$$\|P_{H_h} \dot{u}_h\|_{L^2(0,1), L^2(\frac{1}{2},1))}^2 \leq \frac{1}{2} \|\dot{u}_h(\frac{1}{2}, \cdot)\|_{L^2(0,1)}^2. \quad (1.32)$$

□

Donnons maintenant une preuve rapide du théorème 1.3.3. Notons l'erreur par :

$$e_h(t) = u_h(t) - P_{V_h} u(t).$$



## Chapitre 1. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes hyperboliques

---

L'équation pour l'erreur est donnée par :

$$\begin{aligned} (\dot{e}_h(t), w_h) + a(e_h(t), w_h) &= a((I - P_{V_h})u(t), w_h) + (\dot{u}_h(t), (I - \Pi_h)w_h) \\ &\quad + ((I - P_{V_h})\dot{u}(t), w_h). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Choisissons  $w_h = P_{H_h}e_h$ , intégrons l'équation (1.33) entre 0 et  $t$  et écrivons cette expression comme  $E = \text{I} + \text{II} + \text{III}$  avec :

$$\begin{aligned} E &= (\dot{e}_h, w_h) + a(e_h, w_h), \\ \text{I} &= a((I - P_{V_h})u, w_h), \\ \text{II} &= (\dot{u}_h, (I - \Pi_h)w_h), \\ \text{III} &= ((I - P_{V_h})\dot{u}, w_h). \end{aligned}$$

Puisque  $\partial_x e_h \in H_h$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^t (\dot{e}_h, P_{H_h}e_h)ds + \int_0^t (\partial_x e_h, P_{H_h}e_h)ds &= \int_0^t (P_{H_h}\dot{e}_h, P_{H_h}e_h)ds + \int_0^t (\partial_x e_h, e_h)ds, \\ &= \int_0^t \frac{1}{2} \|P_{H_h}\dot{e}_h\|_{L^2(0,1)}^2 ds + \int_0^t \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \|e_h\|_{L^2(0,1)}^2 ds. \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\frac{1}{2} \|P_{H_h}e_h\|_{L^\infty(0,1), L^2(0,1)}^2 \leq E, \quad (1.34)$$

L'inégalité de Cauchy Schwartz fournit :

$$|\text{I}| \leq \|\partial_x(I - P_{V_h})u\|_{L^2(\Omega)} \|P_{H_h}e_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.35)$$

$$|\text{II}| \leq \|(I - \Pi_h)\dot{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \|P_{H_h}e_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.36)$$

$$|\text{III}| \leq \|(I - P_{H_h})\dot{u}\|_{L^2(\Omega)} \|P_{H_h}e_h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.37)$$

## 1.4 Résultats numériques

---

Les résultats classiques de stabilité et les estimations pour  $(I - P_\bullet)$  comme fonction de  $h$  pour l'opérateur d'interpolation  $P_{V_h}$  et pour les opérateurs de projections  $P_{H_h}$  et  $\Pi_h$  ( voir [3] par exemple ) permettent d'estimer l'erreur  $\|P_{H_h}e_h\|_{L^\infty(0,1), L^2(0,1)}$  puisque  $u$  est suffisamment régulière et puisque les estimations a priori du lemme 1.3.4 permettent de contrôler la solution approchée et ses projections. Expriment :

$$u(t) - u_h(t) = (I - P_{H_h})u + P_{H_h}(I - P_{V_h})u - P_{H_h}e_h + (P_{H_h} - I)u_h,$$

nous obtenons (1.18).

## 1.4 Résultats numériques

### 1.4.1 Schémas d'Euler implicite et explicite en temps

L'inconnue  $v_h$  peut être éliminée ; on a  $v_h(t) = \mathbb{C}^{-1}B\dot{u}_h(t)$  et donc en notant :

$$\mathbb{M} = B^t \mathbb{C}^{-1} B,$$

ceci près que la matrice de masse  $\mathbb{M}$  peut être singulière, où  $\mathbb{C}$  est la matrice de masse obtenue à l'aide de l'élément fini de  $\mathcal{M}_h$  ; on a bien entendu que  $\mathbb{C}$  est une matrice inversible et  $B$  est la matrice construite à partir de  $H_h$  et  $\mathcal{M}_h$ . La condition de type *inf-sup* :

$$\inf_{w_h \neq 0} \sup_{u_h \neq 0} \frac{a(u_h, w_h)}{\|w_h\|_{L^2(0,1)} |u_h|_1} \geq \delta > 0,$$

entre les deux espaces éléments finis assure que le problème (1.13) soit bien posé pour cette semi-discrétisation.

En effet, pour  $w_h$  fixé de norme  $L^2$  égale à 1, montrons l'existence de  $u_h$  telle que :

$$\sup_{u_h \neq 0} \frac{a(u_h, w_h)}{|u_h|_1} \geq \delta,$$

## Chapitre 1. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes hyperboliques

---

Posons  $u = \int_0^x w_h(s)ds$ ,  $|u|_1 \leq \|w_h\|_{L^2(0,1)}$  alors :

$$\begin{aligned} a(u, w_h) &= \int_0^1 (w_h(x))^2 dx + \int_0^1 \int_0^x w_h(s) ds w_h(x) dx, \\ &= \int_0^1 (w_h(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d}{dx} \left( \int_0^x w_h(s) ds \right)^2 dx, \\ &= \int_0^1 (w_h(s))^2 ds + \frac{1}{2} \left( \int_0^1 w_h(s) ds \right)^2 \geq 1, \end{aligned}$$

et

$$\frac{a(u, w_h)}{|u|_1} \geq 1.$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \frac{a(P_{V_h} u, w_h)}{|P_{V_h} u|_1} &= \frac{a(u, w_h)}{|P_{V_h} u|_1} + \frac{a(P_{V_h} u - u, w_h)}{|P_{V_h} u|_1}, \\ &\geq \frac{1}{c} \frac{a(u, w_h)}{|u|_1} - \frac{1}{c} \frac{a(u - P_{V_h} u, w_h)}{|u|_1}; \text{ (car } |P_{V_h} u|_1 \leq c|u|_1), \\ &\geq \frac{1}{c} \frac{a(u, w_h)}{|u|_1} - \frac{1}{c} \frac{|P_{V_h} u - u|_1 \|w_h\|_{L^2(0,1)}}{|u|_1}, \\ &\geq \frac{1}{c} \|w_h\|_{L^2(0,1)} - \frac{1}{c} \frac{|P_{V_h} u - u|_1 \|w_h\|_{L^2(0,1)}}{|u|_1}, \\ &\geq \frac{1}{c} - \frac{1}{c} |P_{V_h} u - u|_1 \geq \frac{1}{2c}; \text{ (car } |P_{V_h} u - u|_1 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0), \end{aligned}$$

donc

$$\frac{a(P_{V_h} u, w_h)}{|P_{V_h} u|_1} \geq \frac{1}{2c},$$

d'où, il existe  $h_0$  tel que l'inégalité est satisfaite pour  $h \leq h_0$ .

Pour simplifier le système (1.17) et comme la matrice  $\mathbf{C}$  est inversible, on élimine  $v_h$  on obtient :

$$B^t \mathbf{C}^{-1} B \dot{u}_h(t) + A u_h(t) = F(t). \quad (1.38)$$

Maintenant nous introduisons une discrétisation en temps. Pour cela définis-

## 1.4 Résultats numériques

sons :

$$\begin{cases} A_{ij}^- = \int_0^{\frac{1}{2}} \partial_x \varphi_j(x) \tilde{\varphi}_i(x) + \varphi_j(x) \tilde{\varphi}_i(x) dx, \\ A_{ij}^+ = \int_{\frac{1}{2}}^1 \partial_x \varphi_j(x) \tilde{\varphi}_i(x) + \varphi_j(x) \tilde{\varphi}_i(x) dx; \quad 1 \leq i, j \leq M, \\ B_{ij} = \int_0^1 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) \varphi_j(x) \psi_i(x) dx; \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq M, \\ C_{ij} = \int_0^{\frac{1}{2}} \psi_j(x) \psi_i(x) dx; \quad 1 \leq i, j \leq m. \end{cases} \quad (1.39)$$

Pour  $K$  fixé nous définissons  $\Delta t = \frac{1}{K}$  et la suite de temps  $t_k = k\Delta t$ ;  $0 \leq k \leq K$ , et pour  $u_h^0$  donné, nous avons le schéma implicite d'Euler :

$$B^t C^{-1} B u_h^{k+1} + \Delta t A u_h^{k+1} = \Delta t F(t_{k+1}) + B^t C^{-1} B u_h^k. \quad (1.40)$$

Remarquons que  $B^t C^{-1} B + \delta t A$  est inversible puisque c'est la somme d'une matrice semi-définie positive et d'une matrice définie positive.

Le schéma explicite d'Euler s'écrit :

$$B^t C^{-1} B u_h^{k+1} + A^+ u_h^{k+1} = \Delta t F^-(t_k) + B^t C^{-1} B u_h^k - \Delta t A^- u_h^k + F^+(t_{k+1}), \quad (1.41)$$

avec

$$F^-(t) = P_{H_h} 1_{[0, \frac{1}{2}]}(x) f(t, x), \quad F^+(t) = P_{H_h} 1_{[\frac{1}{2}, 1]}(x) f(t, x).$$

### 1.4.2 Résultats numériques pour un exemple jouet

Nous terminons ce chapitre avec un exemple simple. La solution exacte est donnée par :  $u(x, t) = \begin{cases} (x - 1/2)^2 t^2 + x^2; & 0 < x < 1/2, \\ x^2; & 1/2 < x < 1, \end{cases}$  ; et la condition initiale par  $u_0(x) = x^2$ ;  $0 < x < 1/2$ . Nous donnons deux courbes de convergence pour le problème **(T)** ( en fonction de  $h$  et  $dt$  sur les figures 1.1-1.2 respectivement en échelle logarithmique ). La condition CFL est bien évidemment respectée. Les lignes sont des droites de référence correspondant aux fonctions  $h$  et  $dt$  respectivement, on observe donc un phénomène de convergence linéaire présente par le schéma (1.41).

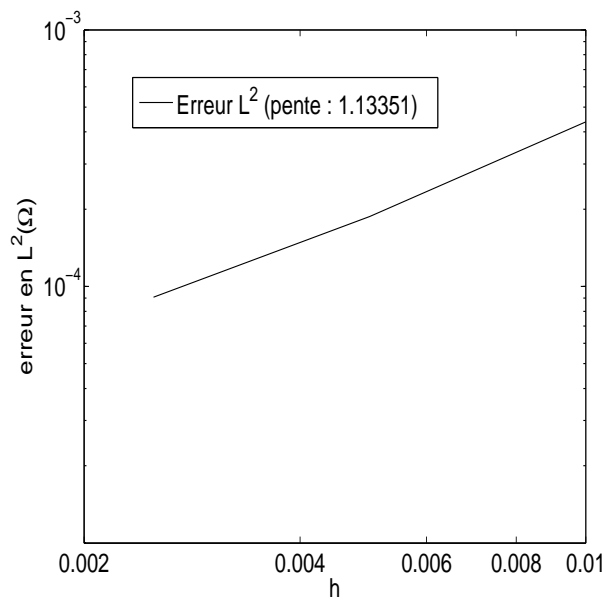


FIGURE 1.1 – Norme discrète  $L^2$  de l'erreur en fonction du pas  $h$  du maillage,  $dt = 10^{-4}$ .

## 1.4 Résultats numériques

---

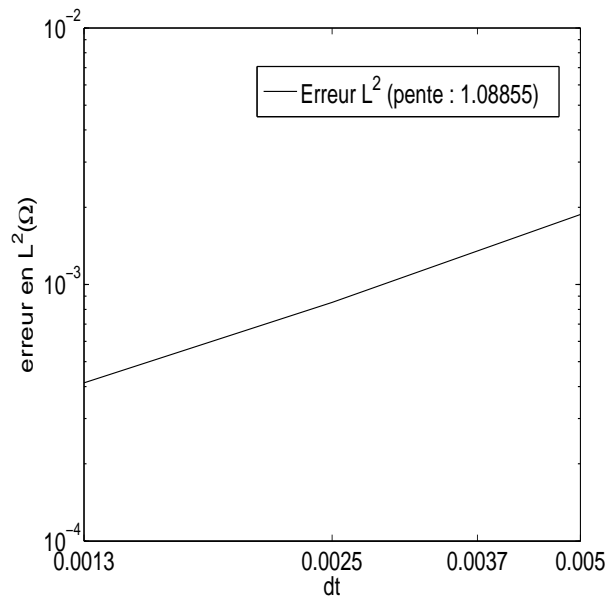


FIGURE 1.2 – Norme discrète  $L^2$  de l'erreur en fonction du pas  $dt$  par la méthode d'Euler explicite,  $h = \frac{1}{2}10^{-2}$ .

Remarquons que d'autres conditions aux limites peuvent être traitées sur  $\partial\Omega_-$ .



## Chapitre 2

# Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques



## 2.1 Introduction

Une méthode de masse singulière en espace est proposée pour traiter le cas d'un opérateur parabolique dégénéré, c'est-à-dire le cas où le coefficient de l'opérateur différentiel en temps peut s'annuler. La méthode présentée est inspirée de la dynamique singulière introduite dans [41]. Nous considérons le cas unidimensionnel où un coefficient s'annule sur un seul intervalle avec des conditions aux limites et initiales triviales par soucis de simplicité. Des conditions initiales et aux limites plus générales peuvent être traitées. Nous traitons ensuite un système qui représente un modèle électrocinétique du cœur très simplifié, mais qui comporte les principales difficultés du problème. Ce problème peut être interprété comme un système avec contrainte algébrique d'index un.

## 2.2 Existence et unicité de solutions aux problèmes $P_\varepsilon$

Il s'agit donc, pour  $f(x, t) = \begin{cases} f_1(x, t) & 0 < x < \frac{1}{2} \\ f_2(x) & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$  régulière et  $u_0$  donnés, en définissant  $\Omega_1 = (0, \frac{1}{2})$ ,  $\Omega_2 = (\frac{1}{2}, 1)$  et  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , de calculer  $u$  solution de :

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} \varepsilon(x) \partial_t u(x, t) - \partial_{x^2}^2 u(x, t) = f(x, t) & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x); & 0 < x < 1, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1; & t > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \varepsilon & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Afin d'introduire le problème approché nous avons besoin d'utiliser une formulation variationnelle du problème  $(P_\varepsilon)$ . Pour cela multiplions la première équation

## 2.2 Existence et unicité de solutions aux problèmes $P_\epsilon$

---

par une fonction  $w(x)$ , supposée une fois continûment dérivable et intégrons entre  $x = 0$  et  $x = 1$ . Nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \epsilon(x) \partial_t u(x, t) w(x) dx - \int_{\Omega} \partial_{x^2}^2 u(x, t) w(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) w(x) dx. \quad (2.2)$$

En intégrant par parties le seconde terme de (2.2) et en supposant  $w(0) = w(1) = 0$ , nous déduisons :

$$\int_{\Omega} \epsilon(x) \partial_t u(x, t) w(x) dx + \int_{\Omega} \partial_x u(x, t) \partial_x w(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) w(x) dx. \quad (2.3)$$

En translatant  $u$  pour prendre en compte la condition en  $x = 1$ , cela revient à modifier  $f$ . Donc nous pouvons considérer  $u \in H_0^1(\Omega)$  et nous ne changeons pas les notations.

On adopte comme espace fonctionnel l'espace  $H_0^1(\Omega)$  et nous définissons la forme bilinéaire :

$$a(u(t), w) = \int_{\Omega} \partial_x u(x, t) \partial_x w(x) dx, \quad (2.4)$$

il est clair que la forme bilinéaire  $a$  est symétrique, continue et coercive sur  $H_0^1(\Omega)$ .

La semi-discrétisation de (2.3) est donc l'approximation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \epsilon(x) u_h(t) w_h(x) dx + a(u_h(t), w_h) = \int_{\Omega} f(t) w_h(x); \forall w_h \in V_h, \\ u_h(0) = u_h^0. \end{cases} \quad (2.5)$$

On introduit une base  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  de l'espace  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$  et on cherche la fonction  $u_h$  sous la forme :

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^N u_h^j(t) \varphi_j(x).$$

Alors, en posant

$$u_h^0 = \sum_{j=1}^N u_h^j(0) \varphi_j(x); \quad 1 \leq j \leq N.$$

## Chapitre 2. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

---

Le problème (2.5) s'écrit :

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \epsilon(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx \frac{du_h^j}{dt}(t) + \sum_{j=1}^N a(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) u_h^j(t) = \int_{\Omega} f(t) \varphi_i(x) dx; \quad 1 \leq i \leq N.$$

Introduisant la matrice de masse  $\mathcal{K}_h$  définie par :

$$(\mathcal{K}_h)_{ij} = \int_{\Omega} \epsilon(x) \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx; \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

et la matrice de rigidité  $\mathcal{R}_h$  définie par :

$$(\mathcal{R}_h)_{ij} = a(\varphi_j(x), \varphi_i(x)); \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

L'approximation variationnelle (2.5) est équivalente au système linéaire d'équations différentielles ordinaires à coefficients constants :

$$\begin{cases} \mathcal{K}_h \frac{du_h}{dt}(t) + \mathcal{R}_h u_h(t) = F_h(t); & 0 < t < T, \\ u_h(0) = u_h^0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Le problème (2.6) est bien posé c'est-à-dire d'après la construction de l'espace  $V_h$ , comme la matrice de masse est strictement diagonalement dominante on peut vérifier que :

$$(u_h, \mathcal{K}_h u_h) \geq ch \sum_{j=1}^N u_j^2; \quad c > 0.$$

Donc la matrice de masse  $\mathcal{K}_h$  est inversible. D'autre part la coercivité de la forme bilinéaire  $a(u, v)$  entraîne le caractère défini positif de la matrice de rigidité  $\mathcal{R}_h$ , et donc son inversibilité. En effet, pour tout vecteur  $u_h \in V_h$ , on a

$$(\mathcal{R}_h u_h, u_h) \geq c |u_h|_1^2,$$

où  $|\cdot|_1$  désigne la semi-norme  $H^1$  :

$$|\varphi|_1^2 = \int_0^1 \varphi'(x)^2 dx.$$

De même, la symétrie de  $a(u, v)$  implique celle de  $\mathcal{R}_h$ .

## 2.2 Existence et unicité de solutions aux problèmes $P_\epsilon$

---

Si on introduit la nouvelle fonction :

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Omega_1, \\ 0 & \text{sur } \Omega_2, \end{cases}$$

on peut réécrire le problème (2.1) sous la forme :

$$(P_0) \begin{cases} \partial_t u(x, t) - \partial_{x^2}^2 u(x, t) = f_1(x, t) & \text{dans } \Omega_1 \times (0, T), \\ -\partial_{x^2}^2 u(x, t) = f_2(x) & \text{dans } \Omega_2 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x); \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1; \quad t > 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Nous voulons maintenant étudier l'existence et l'unicité de solutions au problème  $(P_0)$ .

Notons :

$$b(u, w) : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega_1) \longrightarrow \mathbb{R},$$

la forme bilinéaire associée à l'opérateur de projection sur  $L^2(\Omega_1)$  pour le produit scalaire de  $L^2$  :

$$b(w, \varphi) = \int_{\Omega_1} w(x) \varphi(x) dx.$$

Encore une fois, nous pouvons introduire un opérateur linéaire  $\mathfrak{B} : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega_1)'$ ,

$$\int_{\Omega} \mathfrak{B}u(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega_1} u(x) \varphi(x) dx = b(u, \varphi); \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega_1).$$

Comme nous le verrons, les propriétés de l'opérateur  $\mathfrak{B}$  sont fondamentales dans l'étude du problème, nous caractériserons l'image de  $\mathfrak{B}$  notée  $Im(\mathfrak{B})$ , et son noyau  $Ker(\mathfrak{B})$ . Le problème (2.7) se formule :

Trouver  $(u, v) \in \mathcal{C}^0(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1(0, T, L^2(\Omega)) \times \mathcal{C}^0(0, T, L^2(\Omega_1))$  vérifiant :

$$\begin{cases} (\mathfrak{B}^* v, w)_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + a(u(t), w) = (f(t), w)_{L^2(\Omega)}; \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \\ (v, q)_{L^2(\Omega_1)} = (\mathfrak{B} \dot{u}(t), q)_{L^2(\Omega_1)}; \quad \forall q \in L^2(\Omega_1). \end{cases} \quad (2.8)$$

## Chapitre 2. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

---

**Lemme 2.2.1.** *L'opérateur  $\mathfrak{B} : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega_1)'$  associé à la forme bilinéaire  $b(.,.)$  est l'opérateur linéaire continue de restriction à  $\overline{\Omega}_1$ . Nous avons  $\text{Ker}(\mathfrak{B}) = H_0^1(\Omega_2)$  et l'image de  $\mathfrak{B}$  est  $L^2(\Omega_1)$ .*

En effet,  $\mathfrak{B}$  est un opérateur linéaire continu :

$$\|\mathfrak{B}w\|_{L^2(\Omega_1)} \leq s_p |w|_1,$$

où  $s_p$  est la constante de Poincaré pour  $H_0^1(\Omega_1)$ , et  $|w|_1$  est la semi-norme de  $H^1(\Omega)$ .

**Lemme 2.2.2.** *Nous avons :*

$$\text{Ker}(\mathfrak{B}^*) = \{0\}.$$

*De plus l'opérateur  $\mathfrak{B}^*$  est inversible sur  $\text{Im}(\mathfrak{B}) = (\text{Ker}(\mathfrak{B}^*))^\perp$ .*

**Preuve.**

Montrons que  $\forall \varphi \in L^2(\Omega_1)$ ,  $\varphi \neq 0$  alors :

$$\sup_{w \in H_0^1(\Omega)} b(w, \varphi) \geq c_1 \|\varphi\|_{L^2(\Omega_1)}.$$

Soit  $\varphi \neq 0$  fixée dans  $L^2(\Omega_1) \subset L^2(\Omega)$ , et comme  $H_0^1(\Omega)$  est dense dans  $L^2(\Omega)$  donc il existe une suite  $w_n \in H_0^1(\Omega)$  telle que :

$$w_n \longrightarrow \varphi \text{ dans } L^2(\Omega) \Rightarrow \|w_n\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega_1)},$$

alors pour  $n$  suffisamment grand on a :

$$b(w_n, \varphi) = \int_{\Omega_1} w_n(x) \varphi(x) dx \geq \|\varphi\|_{L^2(\Omega_1)}^2 - \varepsilon,$$

ce qui donne :

$$\sup_{w \in H_0^1(\Omega)} b(w, \varphi) \geq \|\varphi\|_{L^2(\Omega_1)}^2 - \varepsilon \geq c_1 \|\varphi\|_{L^2(\Omega_1)}; \quad \forall \varphi \neq 0.$$

## 2.2 Existence et unicité de solutions aux problèmes $P_\varepsilon$

---

Cela montre que  $\mathfrak{B}^*$  a une image fermée et est injectif.  $\square$

On peut donc écrire :  $(Ker(\mathfrak{B}))^\perp = Im(\mathfrak{B}^*)$  et  $(Ker(\mathfrak{B}^*))^\perp = L^2(\Omega_1)$ . Montrons que la formulation suivante est bien posée.

$$\begin{cases} (\mathfrak{B}^* \mathfrak{B} \dot{u}(t), w)_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + a(u(t), w) = (f(t), w)_{L^2(\Omega)}; & \forall w \in H_0^1(\Omega), \\ u(x, 0) = u_0(x); & 0 < x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Celle-ci résulte de l'élimination de  $v$  dans (2.8). Plus précisément, de la deuxième équation de (2.8) il vient :

$$v = \mathfrak{B} \dot{u}_\perp(t).$$

Tout d'abord nous décomposons  $H_0^1(\Omega)$  comme la somme directe suivante :

$$H_0^1(\Omega) = Ker(\mathfrak{B}) \oplus (Ker(\mathfrak{B}))^\perp = Ker(\mathfrak{B}) \oplus Im(\mathfrak{B}^*),$$

ainsi tout élément peut se décomposer en somme de deux termes  $u_K \in Ker(\mathfrak{B})$ ,  $u_\perp \in (Ker(\mathfrak{B}))^\perp$  et  $u(t) = u_K(t) + u_\perp(t)$ ,  $u_K(t)$  vérifie :

$$(\mathfrak{B}^* \mathfrak{B} \dot{u}_\perp(t), w_K)_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + a(u_K(t) + u_\perp(t), w_K) = (f(t), w_K)_{L^2(\Omega)}; \quad \forall w_K \in Ker(\mathfrak{B}).$$

Nous avons :

$$a(u_K(t), w_K) = (f(t), w_K)_{L^2(\Omega)}; \quad \forall w_K \in Ker(\mathfrak{B}).$$

Le théorème de Lax-Milgram fournit l'existence et l'unicité de  $u_K(t) \in Ker(\mathfrak{B})$ . D'autre part l'existence de  $u_\perp(t)$ , revient à l'étude de l'existence et de l'unicité de solutions pour un problème classique du type équation de la chaleur que nous donnons dans la suite.

**Lemme 2.2.3.** *L'opérateur  $\mathfrak{B}^* \mathfrak{B}$  est inversible sur  $(Ker(\mathfrak{B}))^\perp$ .*

**Preuve.**

Soit  $v = \mathfrak{B} \dot{u}_\perp(t) \in Im(\mathfrak{B}) \Rightarrow v \in (Ker(\mathfrak{B}^*))^\perp$  et d'après le lemme 2.2.2 on a que  $\mathfrak{B}^*$  est inversible sur  $(Ker(\mathfrak{B}^*))^\perp$  ainsi  $\mathfrak{B}^* \mathfrak{B}$  est inversible sur  $(Ker(\mathfrak{B}))^\perp$ .  $\square$

## Chapitre 2. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

---

Remarquons que  $(\text{Ker}(\mathfrak{B}))^\perp = {}_0H^1(\Omega_1)$  où l'indice à gauche signifie que les fonctions s'annulent que sur  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$ . La première équation de (2.8) s'écrit :

$$(\mathfrak{B}^*\mathfrak{B}\dot{u}_\perp(t), w)_{H^{-1}(\Omega) \times H^1(\Omega)} + a(u_\perp(t), w) = (f(t), w)_{L^2(\Omega)}; \quad \forall w \in (\text{Ker}(\mathfrak{B}))^\perp.$$

Comme

$$\int_{\Omega_2} \partial_x u_K \partial_x w dx = 0; \quad \text{pour tout } w \in (\text{Ker}(\mathfrak{B}))^\perp,$$

le problème peut se récrire :

$$\begin{cases} (\mathfrak{B}^*\mathfrak{B}\dot{u}_\perp(t), w) + a(u_\perp(t), w) = (f(t), w); & \forall w \in {}_0H^1(\Omega_1), \\ u(x, 0) = u_0(x); & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ a(u_K(t), w) = (f(t), w); & \forall w \in H_0^1(\Omega_2), \end{cases} \quad (2.9)$$

Utilisant le lemme 2.2.2 et la coercitivité de  $a$ , utilisant les résultats classiques pour l'équation de la chaleur [1] nous avons existence et unicité de  $u_\perp(t)$  et on peut représenter le problème (2.9) dans la décomposition précédente de  $H_0^1(\Omega)$ , de la façons suivante :

$$\begin{cases} \dot{u}_\perp(x, t) - \partial_{x^2}^2 u_\perp(x, t) = f_1(x, t) & \text{dans } \Omega_1 \times (0, T), \\ u_\perp(x, 0) = u_0, & \text{dans } \Omega_1, \\ -\partial_{x^2}^2 u_K(x, t) = f_2(x) & \text{dans } \Omega_2 \times (0, T), \\ u_K(\frac{1}{2}, t) = u_\perp(\frac{1}{2}, t), \quad \partial_x u_\perp(x, t)|_{x=\frac{1}{2}} = \partial_x u_K(\frac{1}{2}), \\ u_K(0) = 0. \end{cases}$$

Ici nous rajoutons comme conditions aux limites la continuité des traces sur l'interface  $\{x = \frac{1}{2}\}$  pour avoir une solution dans  $H_0^1(\Omega)$ .

## 2.3 Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

Pour résoudre numériquement le problème  $(\mathbf{P}_0)$  par la technique de la matrice de masse singulière, et comme nous l'avons déjà fait dans la section 3 du chapitre 1, nous définissons une formulation du problème  $(\mathbf{P}_0)$  :

Trouver  $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega_1)$  vérifiant :

$$\begin{cases} (v(t), w) + a(u(t), w) = (f(t), w); & \forall w \in H_0^1(\Omega), \\ (v(t), q) = (\partial_t u(t), q); & \forall q \in L^2(\Omega_1), \\ u(x, 0) = u_0(x); & 0 < x < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (2.10)$$

où  $a$  est la forme bilinéaire définie sur  $H^1(\Omega)$  par (2.4).

Le système des deux équations (2.10) est appelé formulation mixte du problème (2.7).

Si  $u \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T, L^2(\Omega))$  est solution de (2.7) alors

$$(u, v) \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T, L^2(\Omega)) \times L^2(0, T, L^2(\Omega_1))$$

est la solution de la formulation mixte (2.10).

Prenons des approximations de  $u$  et  $v$  par des éléments finis différents. Autrement dit, on fixe  $\bar{V}_h \subset V = H_0^1(\Omega)$  pour l'approximation de  $u$  et on considère un second espace éléments finis  $\mathcal{M}_h \subset L^2(\Omega_1)$  destiné à approcher  $v$ . Dans ce qui suit, nous notons  $\dot{u}_h$  pour  $\partial_t u_h$ , et  $(\cdot, \cdot)_{\Omega_i}$ ;  $1 \leq i \leq 2$  le produit scalaire dans  $L^2(\Omega_i)$  et  $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$  le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ .

La méthode des éléments finis en espace sur la partie  $\Omega_1$  utilise du  $P_1$  Lagrange, sur la partie  $\Omega_2$  utilise du  $P_1$  Lagrange plus les fonctions bulle  $(\tilde{\varphi}_i)$ , les fonctions  $(\psi_j)$  sont  $P_0$  sur chaque élément. Divisons l'intervalle  $[0, 1]$  en  $M$  parties égales, ( $M$



## Chapitre 2. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

---

étant un entier pair positif  $M = 2m$ ), et posons  $h = \frac{1}{M}$ ,  $x_i = ih$  avec  $i = 0, \dots, 2m$  et  $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$  pour  $i = m, \dots, 2m-1$ , on définit pour  $i = 1, \dots, 2m$  les fonctions suivantes :

$$\varphi_i^1(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}; & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}; & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

et pour  $i = m, \dots, 2m-1$  les fonctions suivantes :

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \varphi_{i+\frac{1}{2}}^*(x) = \begin{cases} -\frac{6}{h^2}(x-x_i)(x-x_{i+1}); & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

On considère les espaces d'approximations :

$$V_h = \{w \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) : w|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1; \quad 0 \leq i \leq M-1\}, \quad (2.11)$$

$$\mathcal{M}_h = \{w \in L^2(\Omega_1) : w|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_0; \quad 0 \leq i \leq m-1\}, \quad (2.12)$$

$$H_h = \{w \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}_2) : w|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_2, \quad w(x_i) = 0; \quad m \leq i \leq M-1\}. \quad (2.13)$$

Si nous posons maintenant :  $N = 3m$ ,  $\varphi_1 = \varphi_1^1$ ,  $\varphi_2 = \varphi_2^1, \dots, \varphi_m = \varphi_m^1$ ,  $\varphi_{m+1} = \varphi_{m+\frac{1}{2}}^*$ ,  $\varphi_{m+2} = \varphi_{m+1}^1, \dots, \varphi_N = \varphi_{2m}^1$ , alors les fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  appartiennent à  $V$  et sont linéairement indépendentes. Nous les choisissons pour engendrer l'espace  $\overline{V}_h$  que nous appelons espace d'approximation de type élément finis. Remarquons tout d'abord, qu'ici la condition initiale  $u_h^0 \in V_h \subset H_0^1(\Omega)$ . Alors  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  est une base de  $\overline{V}_h = V_h + H_h$ . Soit  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$  une base de  $\mathcal{M}_h$ . Écrivons maintenant le problème semi discretisé de (2.10) :

Trouver  $u_h : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{V}_h$ ,  $v_h : \overline{\Omega}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_h$  tels que

$$\begin{cases} (v_h, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h, w_h) = (f(t), w_h)_{\Omega}; \quad \forall w_h \in \overline{V}_h, \\ (v_h, q_h)_{\Omega_1} = (\dot{u}_h, q_h)_{\Omega_1}; \quad \forall q_h \in \mathcal{M}_h. \end{cases} \quad (2.14)$$

## 2.3 Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

De plus nous exigeons que  $u_h(x, 0) = u_h^0(x); \forall x \in \Omega_1$ .

**Proposition 2.3.1.** *Le problème (2.14) possède une et une seule solution :*

$$(u_h, v_h) \in H^1(0, T, \overline{V}_h) \times L^2(0, T, \mathcal{M}_h).$$

On écrit  $u_h(t)$  ( resp.  $v_h(t)$  ) dans la base  $(\varphi_j)_{j=1, \dots, N}$  de  $\overline{V}_h$  ( resp.  $(\psi_k)_{k=1, \dots, m}$  de  $\mathcal{M}_h$  ) :

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^M \tilde{u}_h^j(t) \varphi_j^1(x) + \sum_{j=m}^{2m} \tilde{u}_h^j(t) \tilde{\varphi}_j(x) = \sum_{j=1}^N u_h^j(t) \varphi_j(x), \quad v_h(t) = \sum_{k=1}^m v_h^k(t) \psi_k(x),$$

La formulation mixte discrète (2.14) est équivalente à :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_1} \sum_{k=1}^m v_h^k(t) \psi_k(x) w_h(x) dx + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N u_h^j(t) \partial_x \varphi_j(x) \partial_x w_h(x) dx = (f(t), w_h(x))_{\Omega}; \quad \forall w_h \in \overline{V}_h, \\ \int_{\Omega_1} \sum_{k=1}^{2m} v_h^k(t) \psi_k(x) q_h(x) dx = \int_{\Omega_1} \sum_{j=1}^N \dot{u}_h^j(t) \varphi_j(x) q_h(x) dx; \quad \forall q_h \in \mathcal{M}_h. \end{cases}$$

Choisissons  $w_h = \varphi_i$  et  $q_h = \psi_l$ , ce qui peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m v_h^k(t) \int_{\Omega_1} \psi_k(x) \varphi_i(x) dx + \sum_{j=1}^N u_h^j(t) a(\varphi_j, \varphi_i) = (f(t), \varphi_i(x))_{\Omega}; \quad \forall \varphi_i \in \overline{V}_h, \\ \sum_{k=1}^m v_h^k(t) \int_{\Omega_1} \psi_k(x) \psi_l(x) dx = \sum_{j=1}^N \dot{u}_h^j(t) \int_{\Omega_1} \varphi_j(x) \psi_l(x) dx; \quad \forall \psi_l \in M_h. \end{cases}$$

Ici encore nous pouvons construire les matrices de rigidité  $A$  et de masses  $B, C$  dont les éléments sont donnés par :

$$\begin{cases} A_{ij} = \int_0^1 \partial_x \varphi_j(x) \partial_x \varphi_i(x) dx; & 1 \leq i, j \leq N, \\ B_{kj} = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi_j(x) \psi_k(x) dx; & 1 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq N, \\ C_{kl} = \int_0^{\frac{1}{2}} \psi_l(x) \psi_k(x) dx; & 1 \leq k, l \leq m. \end{cases}$$

Le système différentiel résultant de (2.14) sera alors :

$$\begin{cases} B^t v_h(t) + A u_h(t) = F(t); \quad \forall t \in ]0, T[, \\ C v_h(t) = B \dot{u}_h(t); \quad \forall t \in ]0, T[. \end{cases} \quad (2.15)$$

## Chapitre 2. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

---

$F(t)$  le  $N$ -vecteur de composantes  $F_1(t), \dots, F_N(t)$  définies par :

$$F_i(t) = \int_0^1 f(t)\varphi_i(x)dx; \quad 1 \leq i \leq N.$$

La condition initiale sera donnée par  $u_h^0 = \sum_{j=1}^N u_0(x_j)\varphi_j(x); \quad 1 \leq i \leq m$ .

Décomposons l'espace d'approximation  $\bar{V}_h$  par :

$$\bar{V}_h = \text{Ker}(B) \oplus (\text{Ker}(B))^\perp, \quad (2.16)$$

où le noyau de  $B$  est représenté par l'ensemble :

$$\text{Ker}(B) = \{w \in \bar{V}_h : \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tilde{\varphi}_i w dx = 0; \quad m \leq i \leq M\}. \quad (2.17)$$

Nous éliminons  $v_h$  nous avons :

$$v_h(t) = \mathbf{C}^{-1} B \dot{u}_h(t). \quad (2.18)$$

Injectant (2.18) dans la première équation, on obtient :

$$\begin{cases} B^t \mathbf{C}^{-1} B \dot{u}_h(t) + A u_h(t) = F(t), \\ v_h(t) = \mathbf{C}^{-1} B \dot{u}_h(t). \end{cases}$$

Donc il suffit de résoudre le système différentiel ordinaire :

$$\begin{cases} B^t \mathbf{C}^{-1} B \dot{u}_h(t) = -A u_h(t) + F(t), \\ u_h(0) = u_h^0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Pour résoudre (2.19) il faut décomposer l'espace  $\bar{V}_h$  comme au paragraphe précédent.

### 2.3.1 Estimation d'erreur en norme $L^2$

Auparavant, nous allons examiner l'erreur commise lorsqu'on remplace le problème (2.10) par le problème approché (2.14). Introduisons l'opérateur  $\Pi_h \in \mathcal{L}(\bar{V}_h, \mathcal{M}_h)$  défini par :

$$\int_{\Omega} (\Pi_h \varphi - \varphi) q_h dx = \int_{\Omega_1} (\Pi_h \varphi - \varphi) q_h dx = 0; \quad \forall q_h \in \mathcal{M}_h. \quad (2.20)$$

### 2.3 Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

---

Il est clair que  $\Pi_h$  est une projection, ainsi :

$$(v_h, q_h)_{\Omega_1} = (\dot{u}_h, q_h)_{\Omega_1} = (\Pi_h \dot{u}_h, q_h)_{\Omega_1}; \quad \forall q_h \in \mathcal{M}_h. \quad (2.21)$$

L'équation  $v_h = \mathfrak{C}^{-1} B \dot{u}_h(t)$  exprime  $v_h = \Pi_h \dot{u}_h$  qui représente la composante de  $\dot{u}_h$  sur  $(\text{Ker}(B))^\perp$ , ce que l'on sait aussi de la définition de  $\Pi_h$  et (2.21) :

$$\begin{aligned} (v_h - \dot{u}_h, w_h)_{\Omega_1} &= (v_h, \Pi_h w_h)_{\Omega_1} - (\dot{u}_h, w_h)_{\Omega_1} \\ &= (\dot{u}_h, \Pi_h w_h)_{\Omega_1} - (\dot{u}_h, w_h)_{\Omega_1} \\ &= (\dot{u}_h, (\Pi_h - I)w_h)_{\Omega_1}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

On commence par donner des résultats techniques :

**Lemme 2.3.2.** *Soit  $u_h$  la solution approchée du problème (2.14) et  $\Pi_h$  l'opérateur défini par (2.20), alors on a les estimations a priori suivantes : il existe  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  indépendantes de  $h$  telles que :*

$$\|\Pi_h u_h\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_1))}^2 + \|u_h\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2 \leq C_1 (\|f\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \|\Pi_h u_h^0\|_{L^2(\Omega_1)}^2), \quad (2.23)$$

$$\|\dot{u}_h\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} \leq C_2 (\|\dot{f}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} + \|u_h^0\|_{H^1(\Omega)} + \|f(0)\|_{L^2(\Omega)}). \quad (2.24)$$

**Preuve.**

En effet, on obtient la majoration (2.23) à partir de l'équation :

$$(\dot{u}_h, \Pi_h w_h)_{\Omega_1} + a(u_h, w_h) = (f, w_h)_\Omega; \quad \forall w_h \in \overline{V}_h. \quad (2.25)$$

On prend  $w_h = u_h$ , le premier terme à gauche de l'équation (2.25) s'écrit :

$$(\dot{u}_h, \Pi_h w_h)_{\Omega_1} = (\Pi_h \dot{u}_h, \Pi_h u_h)_{\Omega_1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{d}{dt} \Pi_h u_h, \Pi_h u_h \right)_{\Omega_1} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\Pi_h u_h, \Pi_h u_h)_{\Omega_1}.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Ensuite, intégrant la formule (2.25) par rapport à  $t$  et appliquant l'inégalité de Young nous obtenons (2.23).

Pour établir l'inégalité (2.24), on considère la formule suivante :

$$(B^t v_h, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h, w_h) = (f(t), w_h)_{\Omega}; \quad \forall w_h \in \overline{V}_h. \tag{2.27}$$

Nous utilisons la formule (2.18) on a :

$$(\mathbf{C}^{-1} B \dot{u}_h, B w_h)_{\Omega_1} + a(u_h, w_h) = (f(t), w_h)_{\Omega}; \quad \forall w_h \in \overline{V}_h. \tag{2.28}$$

Il est clair que la matrice  $\mathbf{C}^{-1}$  est symétrique définie positive, utilisant la factorisation de Cholesky  $\mathbf{C}^{-1} = L^t L$  et on dérive par rapport à  $t$  on obtient :

$$(L B \ddot{u}_h, L B w_h)_{\Omega_1} + a(\dot{u}_h, w_h) = (\dot{f}(t), w_h)_{\Omega}; \quad \forall w_h \in \overline{V}_h. \tag{2.29}$$

On sait que  $u_h(t) = \sum_{j=1}^N u_h^j(t) \varphi_j(x)$  et que l'on a la décomposition :

$$\overline{V}_h = \text{Ker}(B) \oplus (\text{Ker}(B))^\perp.$$

Sur  $\text{Ker}(B)$ ,  $t$  est un paramètre et comme  $f$  est régulière  $u_h$  aura la régularité de  $f$  en temps. Ainsi :

$$\dot{u}_h \in \overline{V}_h.$$

On choisit  $w_h = \dot{u}_h$

$$(L B \ddot{u}_h, L B \dot{u}_h)_{\Omega_1} + a(\dot{u}_h, \dot{u}_h) = (\dot{f}(t), \dot{u}_h)_{\Omega},$$

on peut écrire encore :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (L B \dot{u}_h, L B \dot{u}_h)_{\Omega_1} + a(\dot{u}_h, \dot{u}_h) = (\dot{f}(t), \dot{u}_h)_{\Omega}.$$

## 2.3 Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

---

On intègre en temps de 0 à  $T$  :

$$\int_0^T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|LB\dot{u}_h\|_{L^2(\Omega_1)}^2 dt + \int_0^T a(\dot{u}_h, \dot{u}_h) dt = \int_0^T \int_{\Omega} \dot{f}(t) \dot{u}_h dx dt.$$

Appliquant l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|LB\dot{u}_h\|_{L^2(\Omega_1)}^2 - \frac{1}{2} \|LB\dot{u}_h(0)\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|\dot{u}_h\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2 \\ & \leq \frac{1}{2\beta} \|\dot{f}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \frac{\beta}{2} \|\dot{u}_h\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

L'inégalité de Poincaré fournit :

$$\frac{1}{2} \|LB\dot{u}_h\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + (1 - \frac{\beta C_{\Omega}}{2}) \|\dot{u}_h\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{2\beta} \|\dot{f}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|LB\dot{u}_h(0)\|_{L^2(\Omega_1)}^2.$$

Comme les données sont régulières, on peut majorer :

$$\frac{1}{2} \|LB\dot{u}_h(0)\|_{L^2(\Omega_1)}^2$$

avec  $|u_h^0|_1$  et  $f(0)$ .  $\square$

Introduisons maintenant l'opérateur d'interpolation de Clément  $Q_{V_h} \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), V_h)$ .

Nous avons le résultat suivant ( voir théorème 1 page 73 [15] ) :

**Lemme 2.3.3.** *L'opérateur d'interpolation dans  $V_h$  est stable en norme  $H^1$ , c'est-à-dire :*

$$\exists c > 0, \quad |Q_{V_h} \varphi|_1 \leq c |\varphi|_1; \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad (2.30)$$

et de plus satisfait :

$$\exists c_1 > 0, \quad \|(I - Q_{V_h})\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq c_1 h \|\varphi\|_{H^2(\Omega)}, \quad . \quad (2.31)$$

**Théorème 2.3.4.** *Soit  $u^0 = 0$ , et la fonction  $u \in \mathcal{C}^1(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T, H^2(\Omega))$  est solution du problème (2.7),  $u_h \in \bar{V}_h$  son approximation et on suppose que  $f$  est une fonction régulière, on a l'estimation d'erreur suivante : il existe  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que :*

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))} \leq Ch(\|u\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))} + \|\dot{u}\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))})$$

$$+\|\dot{u}_h\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2\|u_h\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2+\|\dot{u}_h\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2\|u\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega))}^2). \quad (2.32)$$

**Preuve.**

Tout d'abord on considère les formules suivantes :

$$(v_h, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h, w_h) = (f(t), w_h)_{\Omega}; \quad \forall w_h \in \overline{V}_h, \quad (2.33)$$

$$(\dot{u}, w_h)_{\Omega_1} + a(u, w_h) = (f(t), w_h)_{\Omega}; \quad \forall w_h \in \overline{V}_h, \quad (2.34)$$

En soustrayant (2.34) à (2.33) :

$$(v_h - \dot{u}, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h - u, w_h) = 0; \quad \forall w_h \in \overline{V}_h.$$

Soit encore

$$(\dot{u}_h - \dot{u} + v_h - \dot{u}_h, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h - u, w_h) = 0; \quad \forall w_h \in \overline{V}_h,$$

$$(\dot{u}_h - \dot{u}, w_h)_{\Omega_1} + (v_h - \dot{u}_h, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h - u, w_h) = 0; \quad \forall w_h \in \overline{V}_h. \quad (2.35)$$

Utilisant la formule (2.22) il vient

$$(\dot{u}_h - \dot{u}, w_h)_{\Omega_1} + (\dot{u}_h, (\Pi_h - I)w_h)_{\Omega_1} + a(u_h - u, w_h) = 0; \quad \forall w_h \in \overline{V}_h, \quad (2.36)$$

donc

$$\frac{d}{dt}(u_h - u, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h - u, w_h) = (\dot{u}_h, (I - \Pi_h)w_h)_{\Omega_1}; \quad \forall w_h \in \overline{V}_h, \quad (2.37)$$

Introduisant maintenant  $\varphi_h \in \overline{V}_h$  arbitraire, la formule (2.37) s'écrit :

$$\begin{aligned} (\dot{u}_h - \dot{\varphi}_h, w_h)_{\Omega_1} + (\dot{\varphi}_h - \dot{u}, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h - \varphi_h, w_h) &= a(u - \varphi_h, w_h) \\ &+ (\dot{u}_h, (I - \Pi_h)w_h)_{\Omega_1}, \end{aligned}$$

## 2.3 Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

---

on peut écrire aussi

$$\begin{aligned} (\dot{u}_h - \dot{\varphi}_h, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h - \varphi_h, w_h) &= (\dot{u} - \dot{\varphi}_h, w_h)_{\Omega_1} \\ &+ a(u - \varphi_h, w_h) + (\dot{u}_h, (I - \Pi_h)w_h)_{\Omega_1}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

On pose  $\varphi_h = Q_{V_h} u$  dans (2.38) on déduit pour tout  $w_h \in \overline{V}_h$  l'équation d'erreur suivante :

$$\begin{aligned} (\dot{u}_h - Q_{V_h} \dot{u}, w_h)_{\Omega_1} + a(u_h - Q_{V_h} u, w_h) &= a(u - Q_{V_h} u, w_h) + (\dot{u} - Q_{V_h} \dot{u}, w_h)_{\Omega_1} \\ &+ (\dot{u}_h, (I - \Pi_h)w_h)_{\Omega_1}. \end{aligned}$$

Remarquant que :

$$(\dot{u} - Q_{V_h} \dot{u}, w_h)_{\Omega_1} = \frac{d}{dt} (u - Q_{V_h} u, w_h)_{\Omega_1}, \quad (2.39)$$

et en utilisant que :

$$\|u - Q_{V_h} u\|_{L^2(\Omega)} \leq ch \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

alors nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^T (\dot{u} - Q_{V_h} \dot{u}, w_h)_{\Omega_1} dt &= \int_0^T ((I - Q_{V_h}) \dot{u}, w_h)_{\Omega_1} dt \\ &\leq \int_0^T \|(I - Q_{V_h}) \dot{u}\|_{L^2(\Omega_1)} \|w_h\|_{L^2(\Omega_1)} dt \\ &\leq Ch^2 \|\dot{u}\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega_1))}^2 + C_0 \|w_h\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega_1))}^2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

En tenant compte de (2.40), choisissons  $w_h = u_h - Q_{V_h} u$  et intégrons par rapport à  $t$ , on obtient :

$$\begin{aligned} |(u_h - Q_{V_h} u)(t)|_{L^2(\Omega_1)}^2 - |(u_h - Q_{V_h} u)(0)|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|u_h - Q_{V_h} u\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2 \\ \leq Ch^2 [\|u\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))}^2 + \|\dot{u}\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega_1))}^2] \end{aligned}$$



$$+ C_1 \int_0^T (\dot{u}_h, (I - \Pi_h)(u_h - Q_{V_h} u)) dt. \quad (2.41)$$

Utilisant la majoration :

$$|(I - \Pi_h)\varphi|_{L^2(\Omega)} \leq ch|\varphi|_{H^1(\Omega)}, \quad (\text{voir [14]}),$$

le deuxième terme à droite de la formule (2.41) devient :

$$\begin{aligned} \int_0^T (\dot{u}_h, (I - \Pi_h)(u_h - Q_{V_h} u))_{\Omega_1} dt &= \int_0^T ((I - \Pi_h)\dot{u}_h(t), (I - \Pi_h)(u_h(t) - Q_{V_h} u(t)))_{\Omega_1} dt, \\ &\leq \int_0^T \|(I - \Pi_h)\dot{u}_h(t)\|_{L^2(\Omega_1)} (\|(I - \Pi_h)u_h(t)\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &\quad + \|(I - \Pi_h)Q_{V_h} u(t)\|_{L^2(\Omega_1)}) dt, \\ &\leq ch \int_0^T \|\dot{u}_h(t)\|_{H^1(\Omega_1)} (ch\|u_h(t)\|_{H^1(\Omega_1)} + ch\|Q_{V_h} u\|_{H^1(\Omega_1)}) dt, \\ &\leq c^2 h^2 \|\dot{u}_h\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega_1))}^2 [\|u_h\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega_1))}^2 + c'\|u\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega_1))}^2]. \end{aligned}$$

Dans (2.41) on choisit  $u_h(0) = Q_h u(0)$  et utilisant la stabilité en semi-norme  $H^1$  de  $Q_{V_h}$  et la majoration précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} &\|Q_{V_h} u - u_h\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_1))}^2 + \|u_h - Q_{V_h} u\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2 \leq Ch^2 [\|u\|_{L^\infty(0,T,H^2(\Omega))}^2 \\ &+ \|\dot{u}\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega_1))}^2 + \|\dot{u}_h\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega_1))}^2 \|u_h\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega_1))}^2 + \|\dot{u}_h\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega_1))}^2 \|u\|_{L^2(0,T,H^1(\Omega_1))}^2]. \end{aligned}$$

En majorant :

$$\|u_h - u\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2 \leq \|Q_{V_h} u - u_h\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2 + \|Q_{V_h} u - u\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega))}^2,$$

on a l'estimation.  $\square$

**Remarque 2.3.5.** On considère maintenant les formules suivantes :

$$\begin{cases} (\mathfrak{B}^* v_h(t), w_h)_{\Omega_1} + a(u(t), w_h) = (f(t), w_h)_\Omega; & \forall w_h \in \overline{V}_h, \\ (v_h(t), w_h)_{\Omega_1} + a(u_h(t), w_h) = (f(t), w_h)_\Omega; & \forall w_h \in \overline{V}_h. \end{cases}$$

## 2.3 Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

---

Choisissons  $w_h \in \overline{V}_h \cap {}_0H^1(\Omega_2)$ , on a

$$a(u(t), w_h) = a(u_h(t), w_h) = (f(t), w_h)_{\Omega_2}. \quad (2.42)$$

C'est un problème elliptique classique où  $f$  est un paramètre. En utilisant la technique d'Aubin-Nitche [1] on en déduit que pour  $t$  fixé

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{L^2(\Omega_2)} \leq Ch^2 \|u(t)\|_{H^2(\Omega_2)}. \quad (2.43)$$

### 2.3.2 Méthode d'Euler implicite et explicite

On utilise une méthode de différences finies en temps pour résoudre le système d'équations différentielles ordinaires (2.19). Pour simplifier les notations, nous ré-écrivons le système (2.19) sans mentionner la dépendance spatiale en  $h$

$$\begin{cases} B^t \mathbf{C}^{-1} B \dot{u}(t) + Au(t) = F(t); \quad \forall t \in ]0, T], \\ u(0) = u^0, \end{cases} \quad (2.44)$$

où on suppose que  $F(t)$  est continue sur  $[0, T]$ . On découpe l'intervalle de temps  $[0, T]$  en  $K$  pas de temps  $t_k = k\delta t$ ;  $0 \leq k \leq K$ . Pour  $u^0$  donné, on propose le schéma implicite :

$$B^t \mathbf{C}^{-1} B u^{k+1} + \delta t A u^{k+1} = \delta t F(t_{k+1}) + B^t \mathbf{C}^{-1} B u^k. \quad (2.45)$$

La matrice  $B^t \mathbf{C}^{-1} B + \delta t A$  est inversible car somme d'une matrice semi-définie positive et d'une matrice définie positive. Nous décomposons la matrice  $A$  en  $A = A^- + A^+$  avec  $A^- = \int_0^1 \partial_x \varphi_i(x) \partial_x \varphi_j(x) dx$  calculé sur  $(\text{Ker}(B))^\perp$  et  $A^+$  c'est le calcul sur  $\text{Ker}(B)$ , alors le schéma explicite d'Euler s'écrit :

$$(B^t \mathbf{C}^{-1} B + \delta t A^+) u^{k+1} = \delta t F^-(t_k) + B^t \mathbf{C}^{-1} B u^k - \delta t A^- u^k + \delta t F^+(t_{k+1}). \quad (2.46)$$

$$F^-(t_k) = P_{H_h} 1_{[0, \frac{1}{2}]} f(x, t_k); \quad F^+(t_{k+1}) = P_{H_h} 1_{[\frac{1}{2}, 1]} f(x, t_{k+1})$$

Nous illustrons la théorie précédente en montrant un exemple simple, utilisant des maillages avec des fonctions bulles sur  $\Omega_2$ . Le problème est l'équation de la

## Chapitre 2. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

---

chaleur sur le domaine  $\Omega$ . Le second membre et la condition de Dirichlet sont choisis de façon que la solution exacte soit :  $u(x, t) = (x - 1/2)^3 t^2 + x^3$ , si  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  et  $u(x, t) = x^3$ , si  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ .

Nous avons calculé la solution sur un maillage régulier sur  $[0, 1]$  avec des fonctions bulles sur  $[\frac{1}{2}, 1]$ , comportant des pas  $h = \frac{1}{2m}$  et  $\delta t = \frac{1}{K}$  avec  $m = 100$ , et  $K = 100$ .

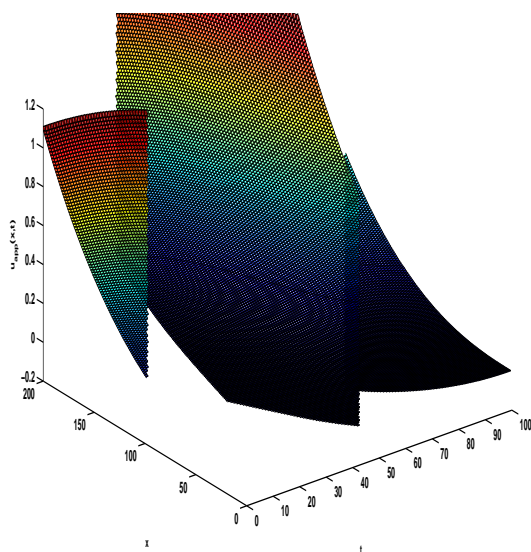


FIGURE 2.1 – La solution approchée

Les figures 2.2-2.3 présentent respectivement les erreurs en norme  $L^2$  par la méthode d'Euler implicite et explicite en fonction de  $h$  et en fonction  $\delta t$ , en échelle  $\log - \log$ . On observe bien une pente pratiquement égale à 2 en espace et égale à 1 en temps.

## 2.3 Méthode mixte et technique de la matrice de masse singulière pour les problèmes approchés

---

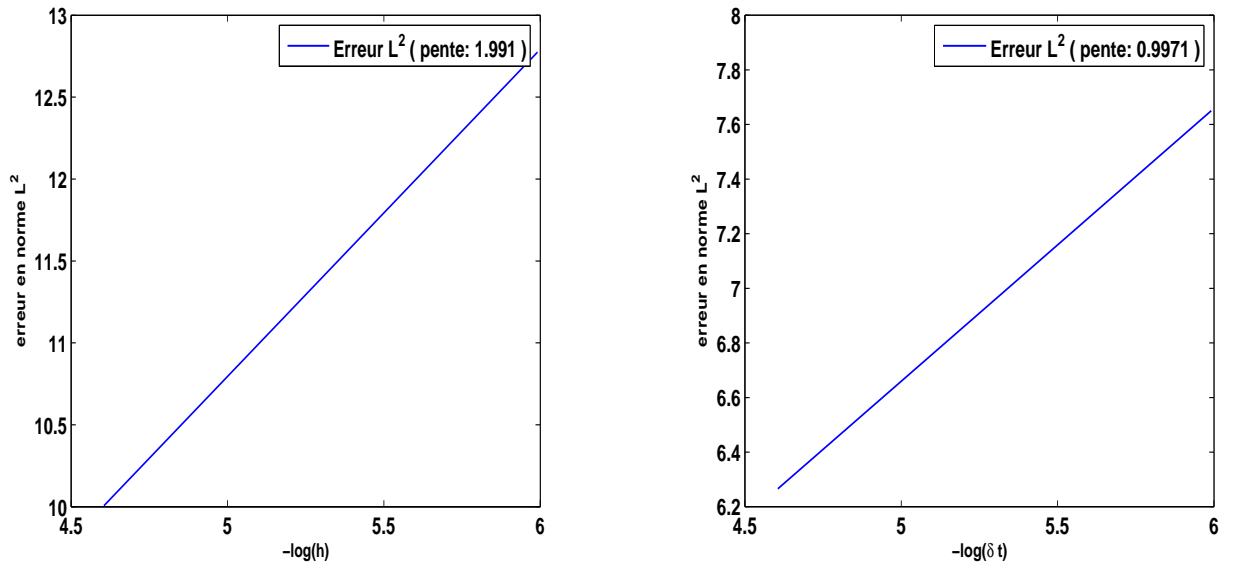


FIGURE 2.2 – Erreurs en norme  $L^2$  par la méthode d'Euler implicite.

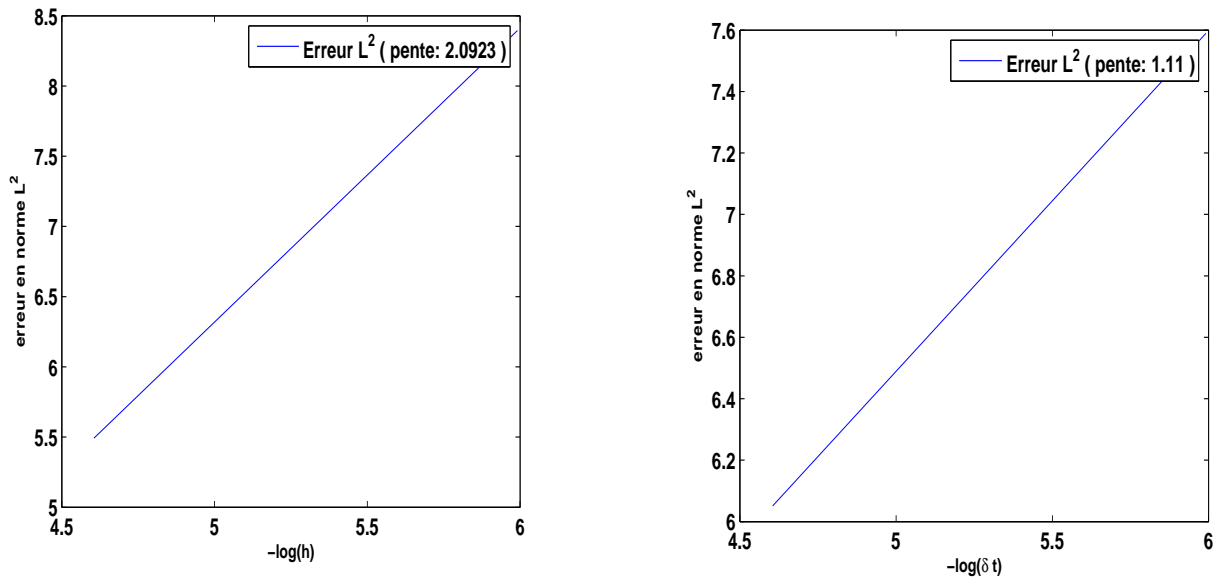


FIGURE 2.3 – Erreurs en norme  $L^2$  par la méthode d'Euler explicite.

**Remarque 2.3.6.** *La méthode présentée peut se généraliser aux problèmes en di-*

mension supérieur en espace. Les fonctions bulles seront les fonctions bulles associées à chaque triangle ou quadrangle du domaine  $\Omega_1$ .

## 2.4 Méthode du second membre modifié

Dans cette section, on présente une méthode pour résoudre le problème (  $\mathbf{P}_0$  ) dans le cas où la recherche de la solution statique dans le noyau n'intervient pas. En effet, cette méthode proposée ( voir [12] ) est basée sur la formulation variationnelle du problème (  $\mathbf{P}_0$  ) dans laquelle la quantité différentielle  $1_{[\frac{1}{2},1]}(x)\partial_t u(x,t)$  n'est pas éliminée dans la partie  $\Omega_2$  mais rajoutée au seconde membre de la première équation de (2.10) dans le problème (  $\mathbf{P}_0$  ), ce qui revient à écrire :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = f(x,t) + 1_{[\frac{1}{2},1]}(x)\partial_t u(x,t) & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1; \quad t > 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

La formulation variationnelle associée à ce problème est alors : trouver  $u \in C^1((0,1); L^2(\Omega)) \cup C^0((0,1); H_0^1(\Omega))$ , tel que  $u(0,x) = u_0(x)$  et pour toute fonction  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)v dx + \int_{\Omega} \partial_x u(t) \partial_x v dx = \int_{\Omega} f(t)v dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_2} u(t)v dx. \quad (2.48)$$

En pratique, on construit une suite de champs  $u_n$  selon le procédé suivant :  $u_0$  étant fixé, chercher  $u_{n+1}$  tel que :

$$\int_{\Omega} \partial_t u_{n+1} v dx + \int_{\Omega} \partial_x u_{n+1} \partial_x v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Omega_2} \partial_t u_n v dx. \quad (2.49)$$

On cherche maintenant à obtenir des estimation a priori sur  $u_{n+1} - u$  de telle sorte à pouvoir passer à la limite  $n \rightarrow \infty$ , c'est l'objet du théorème suivant :

**Théorème 2.4.1.** *La suite  $(u_n)$  converge vers  $u$  dans  $H_0^1(\Omega)$ .*

## 2.4 Méthode du second membre modifié

---

**Preuve.**

On fait la différence entre la relation de récurrence (2.49) et la formulation variationnelle (2.48), et l'on prend  $e_{n+1} = u_{n+1} - u$  et  $v = \dot{e}_{n+1}$ , pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{e}_{n+1} \dot{e}_{n+1} dx + \int_{\Omega} \partial_x e_{n+1} \partial_x \dot{e}_{n+1} dx &= \int_{\Omega_2} \dot{e}_n \dot{e}_{n+1} dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|\dot{e}_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\dot{e}_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2.50)$$

La formule (2.50) donne :

$$\frac{1}{2} \|\dot{e}_{n+1}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{2} \|\dot{e}_n\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2.$$

Dont on déduit que  $\|\dot{e}_{n+1}\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}$  est décroissant, et donc converge vers un réel positif ou nul.

D'autre part, on pose  $v = e_{n+1}$ , on obtient alors ( par Cauchy Schwarz et l'inégalité de Poincaré) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |e_{n+1}|^2 dx + \int_{\Omega} |\partial_x e_{n+1}|^2 dx &= \int_{\Omega_2} \dot{e}_n e_{n+1} dx \\ &\leq \|\dot{e}_n\|_{L^2(\Omega)} \|e_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sqrt{C} \|\dot{e}_n\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_x e_{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{C}{2} \|\dot{e}_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_x e_{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (2.51)$$

d'où,  $\forall t \in [0, T]$  :

$$\int_{\Omega} |e_{n+1}|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\partial_x e_{n+1}|^2 dx dt \leq C \int_0^t \|\dot{e}_n\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

On en déduit que la suite  $e_n$  est bornée en norme  $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$  et  $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ .

Ceci permet d'extraire une sous suite de la suite  $e_n$  que nous notons encore  $e_n$  qui

## Chapitre 2. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

---

converge faiblement étoile dans  $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$  et faiblement dans  $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$ . De l'injection compacte de  $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$  dans  $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ , nous déduisons :

$$0 \leq \frac{1}{2} \|e_{n+1}\|_{L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{2} \|\dot{e}_n\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}^2 - \frac{1}{2} \|\dot{e}_{n+1}\|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))}^2 \longrightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

En fait c'est toute la suite qui converge, puisque nous pouvons passer à la limite (2.49) et donc nous avons unicité des solutions du problème (2.47).  $\square$

Sur la formulation variationnelle (2.48), nous appliquons la méthode des éléments finis de Lagrange de degré 1 en espace et un schéma classique en temps, le schéma d'Euler implicite. On définit le pas de temps  $\delta t$  et on approche  $u((n-1)\delta t)$  ( resp  $u(n\delta t)$  ) par  $u_{n-1}$  ( resp  $u_n$  ). Les solutions  $u_{n-1}$ ,  $u_n$  aux pas de temps  $(n-1)\delta t$  et  $n\delta t$  étant données, on trouve  $u_{n+1}$  grâce à l'équation :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\delta t} - \partial_{x^2}^2 u_{n+1} = f_{n+1} + 1_{[\frac{1}{2}, 1]}(x) \frac{u_n - u_{n-1}}{\delta t}, \quad (2.52)$$

où  $f_{n+1}$  est le terme source au pas de temps  $(n+1)\delta t$ . Ici la dérivée en temps au seconde membre est explicite. On peut avoir une forme implicite qui est non linéaire et demande une méthode itérative. Pour  $n$  fixé et  $u_{n+1}^0 = u_{n+1}$  calculé par l'équation (2.52), si  $u_{n+1}^k$  est connu ; calculer  $u_{n+1}^{k+1}$  la solution de :

$$\frac{u_{n+1}^{k+1} - u_n}{\delta t} - \partial_{x^2}^2 u_{n+1}^{k+1} = f_{n+1} + 1_{[\frac{1}{2}, 1]}(x) \frac{u_{n+1}^k - u_n}{\delta t}. \quad (2.53)$$

On choisit un exemple simple avec une solution exacte  $u(x, t) = x(x - \frac{1}{2})t^2 + x^3$  si  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ,  $u(x, t) = x^3$  si  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$  qui vérifie bien les conditions de Dirichlet. Nous avons pris  $h = 5 \cdot 10^{-3}$  et  $\delta t = 10^{-4}$ . Les figures 2.4(a)- 2.4(b) représentent respectivement les erreurs en norme  $L^\infty$  par la méthode du second membre modifié des problèmes (2.52), (2.53) et la figure 2.5 représente aussi l'erreurs en norme  $L^\infty$  mais par la méthode de masse singulière. On observe que la vitesse de convergence de la méthode du second membre modifié est plus faible que ce qui est prédit dans le cas de la méthode de masse singulière.

## 2.4 Méthode du second membre modifié

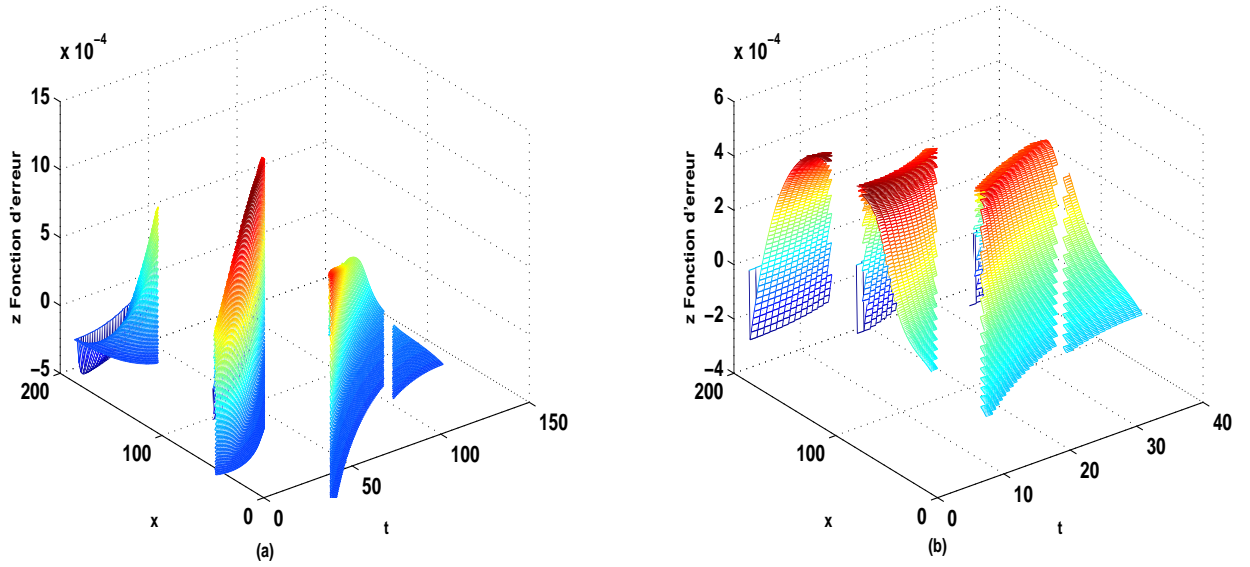


FIGURE 2.4 – Erreurs en norme  $L^\infty$  la méthode d'Euler avec un second membre modifié. (a) méthode explicite, (b) méthode implicite.

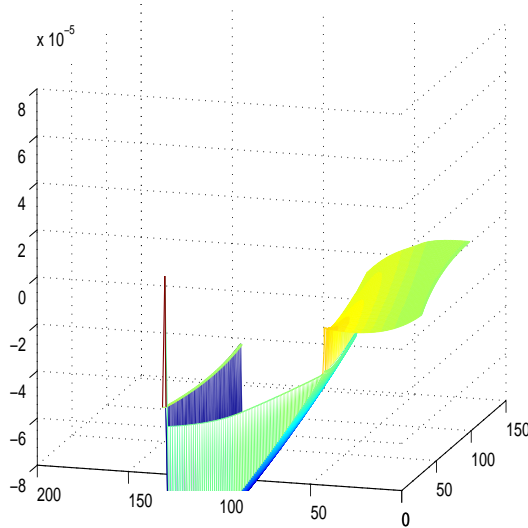


FIGURE 2.5 – Erreurs en norme  $L^\infty$  par la méthode d'Euler implicite avec une matrice de masse singulière, avec  $h = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\delta t = 10^{-4}$  et  $h^2 \ln(h) = 1.2 \times 10^{-4}$ .



## 2.5 Analyse des difficultés d'un modèle bidomaine pour l'électrocardiologie

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine représentant le coeur, dans ce que suit nous montrons comment la méthode de masse singulière permet de traiter un modèle bidomaine pour l'électrocardiologie.

Le modèle bidomaine représente le tissu cardiaque à une échelle macroscopique comme la superposition de deux milieux, les milieux intra et extra cellulaires qui sont distincts à l'échelle microscopique [13]. La différence des potentiels intra et extra cellulaires est notée  $u_i$  et le potentiel extra cellulaire est noté  $u_e$  qui sont solutions de :

$$\partial_t u_i - \operatorname{div}(\sigma_i \nabla u_i) = \operatorname{div}(\sigma_e \nabla u_e) + h(t) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.54)$$

$$-\operatorname{div}((\sigma_i + \sigma_e) \nabla u_e) = \operatorname{div}(\sigma_i \nabla u_i) \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.55)$$

$$u_i(x, 0) = u_{i0}(x) \quad x \in \Omega, \quad (2.56)$$

$$\partial_n(\sigma_i u_i) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (2.57)$$

$$u_e \text{ donné sur } \partial\Omega. \quad (2.58)$$

Ici  $\sigma_i$  et  $\sigma_e$  désignent la conductivité électrique des milieux considérés. Le problème ((2.54)-(2.58)) n'est pas un système uniformément parabolique, afin d'en comprendre les difficultés numériques commençons par semi-discrétiser en espace le problème ((2.54)-(2.58)).

Une formulation variationnelle s'écrit :

## 2.5 Analyse des difficultés d'un modèle bidomaine pour l'électrocardiologie

---

Trouver  $u_i \in H^1(\Omega)$  et  $u_e \in H_0^1(\Omega)$  satisfont :

$$\text{Trouver } u_i \in H^1(\Omega) \text{ et } u_e \in H_0^1(\Omega) \text{ satisfont :} \quad (2.59)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_i \varphi dx + \int_{\Omega} \sigma_i \nabla u_i \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \sigma_e \nabla u_e \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} h(t) \varphi dx; \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega) \quad (2.60)$$

$$\int_{\Omega} (\sigma_i + \sigma_e) \nabla u_e \nabla \psi dx + \int_{\Omega} \sigma_i \nabla u_i \nabla \psi dx = \int_{\Omega} f(t) \psi dx; \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \quad (2.61)$$

$$u_i(x, 0) = u_{i0}(x); \quad x \in \Omega, \quad (2.62)$$

$$u_e = 0; \quad \partial\Omega. \quad (2.63)$$

Ici l'équation (2.61) a un second membre car  $u_e|_{\partial\Omega} \neq 0$ .

### 2.5.1 Le problème semi-discrétisé

Utilisant une méthode de Galerkin, soit  $W_m \subset H^1(\Omega)$  un sous espace vectoriel de dimension finie.  $W_m = \text{vec}\{\theta_k\}_{k=1}^{m+1}$  où par exemple  $\theta_k$  sont des fonctions  $P_1$  liées à des éléments finis de Lagrange. Nous cherchons :

$$u_i(x, t) = \sum_{k=1}^{m+1} u_{i_k} \theta_k, \quad u_e(x, t) = \sum_{k=1}^{m+1} u_{e_k} \theta_k.$$

Notons  $A_i$ ,  $A_e$  les  $(m+1) \times (m+1)$  matrices définies par :

$$A_{i_{kl}} = \int_{\Omega} \sigma_i \nabla \theta_l \nabla \theta_k dx; \quad 1 \leq k, l \leq m+1,$$

$$A_{e_{kl}} = \int_{\Omega} \sigma_e \nabla \theta_l \nabla \theta_k dx; \quad 1 \leq k, l \leq m+1.$$

Une formulation semi-discrétisée du problème ((2.60)-(2.63)) s'écrit : en notant  $u_i$  et  $u_e$  les  $m+1$  vecteurs :

$$u_i(t) = (u_{i_1}, \dots, u_{i_{m+1}})^t,$$

$$u_e(t) = (u_{e_1}, \dots, u_{e_{m+1}})^t,$$

et par  $H(t)$ ,  $F(t)$  les  $(m+1)$  vecteurs :

$$H(t) = \left( \int_{\Omega} \theta_1 h(t) dx, \dots, \int_{\Omega} \theta_{m+1} h(t) dx \right)^t,$$

$$F(t) = \left( \int_{\Omega} \theta_1 f(t) dx, \dots, \int_{\Omega} \theta_{m+1} f(t) dx \right)^t.$$

$$\frac{d}{dt} u_i(t) + A_i u_i(t) + A_e u_e(t) = H(t), \quad (2.64)$$

$$(A_i + A_e) u_e(t) + A_i u_i(t) = F(t), \quad (2.65)$$

$$u_i(0) = u_{i0}. \quad (2.66)$$

Introduisons les fonctions régulières :

$$\Phi(t, U, V) = -A_e V - A_i U + H(t),$$

et

$$\Psi(t, U, V) = (A_e + A_i) V + A_i U - F(t).$$

Le problème ((2.64)-(2.66)) se reformule :

$$\frac{d}{dt} u_i(t) = \Phi(t, u_i(t), u_e(t)), \quad (2.67)$$

$$\Psi(t, u_i(t), u_e(t)) = 0, \quad (2.68)$$

$$u_i(0) = u_{i0}. \quad (2.69)$$

Le problème ((2.67)-(2.69)) est un problème d'équation différentielles algébriques d'index 1.

Dérivons (2.68) par rapport au temps :

$$D_1 \Psi(t, u_i(t), u_e(t)) + D_2 \Psi(t, u_i(t), u_e(t)) \Phi(t, u_i(t), u_e(t)) + D_3 \Psi(t, u_i(t), u_e(t)) \frac{d}{dt} u_e(t) = 0. \quad (2.70)$$

Si on suppose de plus  $\frac{d}{dt} u_e(t) = 0$  alors (2.70) fournit une condition nécessaire dite condition cachée :

$$D_2 \Psi(t, u_i(t), u_e(t)) \Phi(t, u_i(t), u_e(t)) = 0. \quad (2.71)$$

## 2.5 Analyse des difficultés d'un modèle bidomaine pour l'électrocardiologie

---

On peut réécrire encore :

$$F'(t) + A_i(-A_e V - A_i U + H(t)) = 0. \quad (2.72)$$

Si on résout ((2.64)-(2.66)) lorsque  $u_i$  et  $u_e$  vérifient une condition de Dirichlet en  $x = 1$  avec un schéma d'Euler implicite, la solution numérique n'est pas bonne ( voir les figures 2.6-2.7 ), car (2.71) n'est pas satisfaite. Evidemment si  $\frac{d}{dt}u_e \neq 0$  nous avons un problème d'index 1.

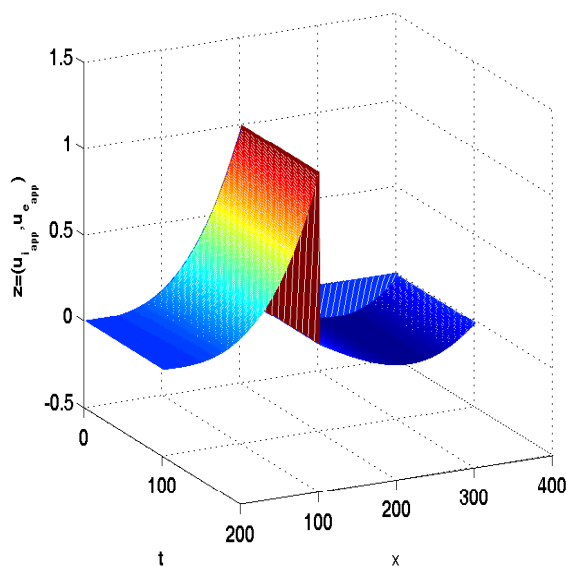


FIGURE 2.6 – La solution approchée

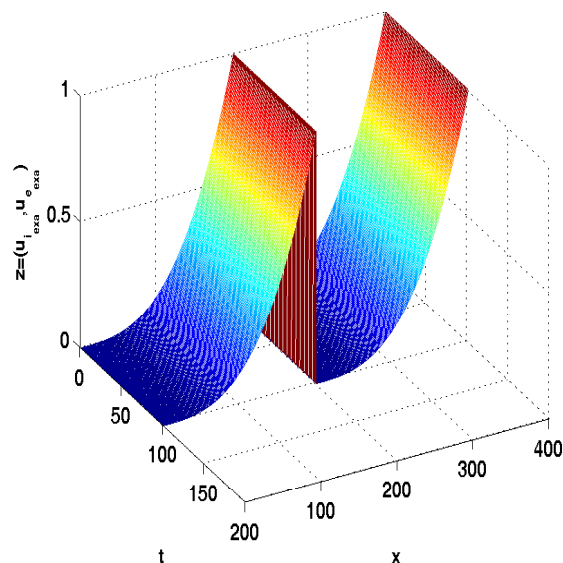


FIGURE 2.7 – La solution exacte

Dans le cas général comme

$$D_3\Psi(t, u_i(t), u_e(t)) = A_i + A_e,$$

est inversible ( du fait des conditions de Dirichlet ) on peut obtenir une équation différentielle pour  $u_e$ .

On peut aussi mettre en oeuvre une méthode de perturbation singulière qui numériquement est problématique lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u_i(t) = \Phi(t, u_i(t), u_e(t)), \\ \varepsilon \frac{d}{dt}u_e(t) = \Psi(t, u_i(t), u_e(t)), \\ u_i(0) = u_{i0}, \quad u_e(0) = 0. \end{cases}$$

### 2.5.2 Une méthode de masse singulière pour résoudre des équations paraboliques dégénérées

Nous présentons la méthode dans le cas  $\Omega = [0, 1]$ . La méthode de la masse singulière peut se comprendre comme une méthode de perturbation singulière mais

## 2.5 Analyse des difficultés d'un modèle bidomaine pour l'électrocardiologie

---

sans difficultés numériques.

Notons  $W_h = \text{vec}\{\varphi_k\}_{k=1}^{m+1}$  l'espace d'éléments finis de Lagrange  $P_1$ .

$S_h = \text{vec}\{\varphi_{k+\frac{1}{2}}\}_{k=1}^m$  l'espace engendré par les fonctions bulles :

$$\varphi_{k+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} -\frac{6}{h^2}(x-x_k)(x-x_{k+1}); & x_k \leq x \leq x_{k+1}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (2.73)$$

On considère  $\mathcal{M}_h = \text{vec}\{q_k\}_{k=1}^m$  l'espace d'éléments finis de Lagrange  $P_0$  et

$$V_h = W_h \oplus S_h, \quad \dot{V}_h = \dot{W}_h \oplus S_h,$$

avec  $\dot{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$  et  $\dot{W}_h \subset H_0^1(\Omega)$ .

Soit  $B_h : \dot{V}_h \longrightarrow \mathcal{M}_h$  dont la matrice est une matrice  $(m) \times (2m+1)$

$$B_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_j q_i dx; \quad \forall q_i \in \mathcal{M}_h \quad (1 \leq i \leq m), \quad \forall \varphi_j \in \dot{V}_h \quad (1 \leq j \leq 2m+1).$$

La matrice  $B$  a un noyau non réduit à  $\{0\}$ .

Notons par  $\mathbb{C}$  la  $(m) \times (m)$  matrice définie par :

$$\mathbb{C}_{ij} = \int_{\Omega} q_j q_i dx \quad \forall q_i \in \mathcal{M}_h.$$

Dans le problème ((2.64)-(2.66)) l'équation (2.65) est remplacée par :

$$\begin{cases} B^t v + (A_i + A_e)u_e(t) + A_i u_i(t) = F(t); \\ \mathbb{C}v = B\dot{u}_e(t), \end{cases} \quad (2.74)$$

avec la notation  $\dot{u}_e(t) = \frac{d}{dt}u_e(t)$ .

Nous rajoutons l'opérateur différentiel en temps manquant mais nous laissons sur  $\text{Ker}(B)$  subsister l'équation initiale.

Éliminons  $v$  nous obtenons :

$$\begin{cases} B^t \mathbb{C}^{-1} B \dot{u}_e(t) + (A_i + A_e)u_e(t) + A_i u_i(t) = F(t); \\ u_e(0) = 0. \end{cases} \quad (2.75)$$

## Chapitre 2. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

---

Le système ((2.64)-(2.66)) se transforme en :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & B^t C^{-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_i(t) \\ \dot{u}_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_i & A_e \\ A_i & A_i + A_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(t) \\ u_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(t) \\ F(t) \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Nous pouvons appliquer un schéma d'Euler implicite au système (2.76)

$$\begin{bmatrix} M u_i^{n+1} \\ B^t C^{-1} B u_e^{n+1} \end{bmatrix} + \delta t \begin{bmatrix} A_i & A_e \\ A_i & A_i + A_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{n+1} \\ u_e^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M u_i^n \\ B^t C^{-1} B u_e^n \end{bmatrix} + \delta t \begin{bmatrix} H(t_{n+1}) \\ F(t_{n+1}) \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

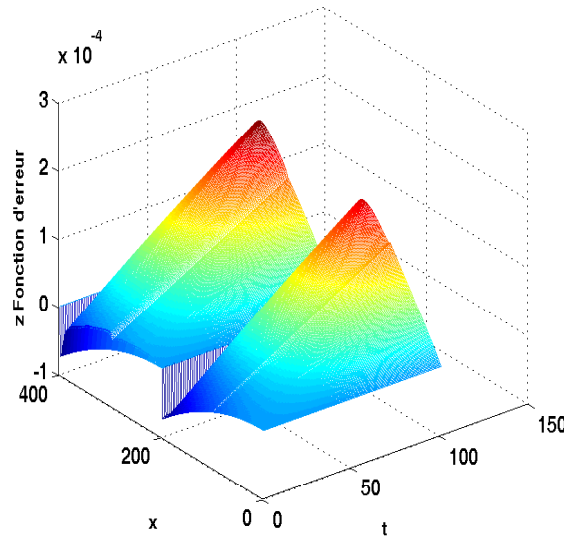
avec

$$u_i^0 = u_{i0}, \quad u_e^0 = 0. \quad (2.78)$$

Si nous résolvons ((2.77)-(2.78)) dans le cas où la solution exacte est donnée par :

$$u_i(x, t) = x(x-1)^2 t^2 + x^3, \quad u_e(x, t) = x^2(x-1)t + x^3,$$

et où  $m = 100$ , nous pouvons représenter l'erreur ponctuelle qui est de l'ordre de  $10^{-4}$  avec des conditions de Dirichlet et de l'ordre de  $10^{-2}$  avec des conditions de Neumann pour  $\delta t = 10^{-4}$  après 100 pas de temps ( voir les figures 2.8-2.9 ), l'erreur représentée est l'erreur aux noeuds du maillage.



## 2.5 Analyse des difficultés d'un modèle bidomaine pour l'électrocardiologie

---

FIGURE 2.8 – Erreurs en norme  $L^\infty$  avec des conditions de dirichlet.

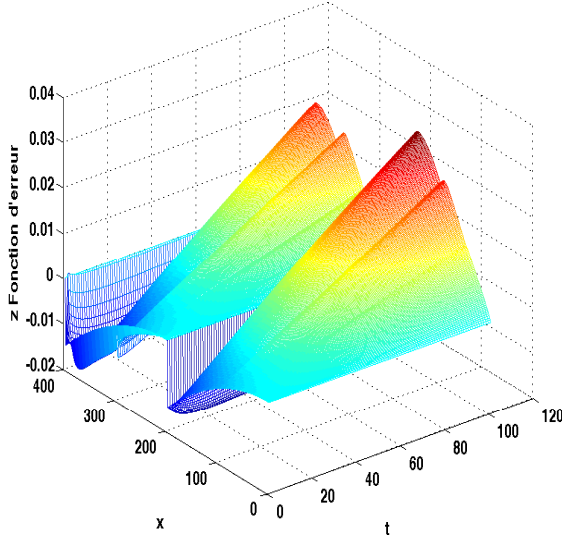


FIGURE 2.9 – Erreurs en norme  $L^\infty$  avec des conditions de Neumann non homogènes.

Le cas du problème bidomaine présenté au début de la section correspond au cas avec des conditions de Neumann non homogènes pour  $u_i$ .

### 2.5.3 Analyse de l'erreur

Afin de garder l'exposé simple, nous analysons l'erreur que pour la deuxième équation (2.76) que nous récrivons sous forme simplifiée avec la notation  $u_{eh}(t) = u_h(t)$ .

$$(B\dot{u}_h(t), Bw_h) + a(u_h(t), w_h) = (f(t), w_h); \quad \forall w_h \in \mathring{V}_h. \quad (2.79)$$

Nous décomposons  $\mathring{V}_h$  comme

$$\mathring{V}_h = K_h \oplus K_h^\perp,$$



## Chapitre 2. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

---

où  $K_h$  est le noyau de  $B$  et l'orthogonalité est celle induite par :

$$a(\varphi, w) = \int_{\Omega} (\sigma_i + \sigma_e) \partial_x \varphi(x) \partial_x w(x) dx$$

avec  $\sigma_i$  et  $\sigma_e$  des constantes.

Soit  $S_h$  le sous espace engendré par des fonctions bulles définies en (2.73) sur tous les segments  $[x_k, x_{k+1}]$ . Soit  $vec\{\psi_k\}$  une base de  $K_h$  ou  $K_h$  est défini par l'ensemble  $\{\psi \in \mathring{V}_h : \int_{\Omega} \psi(x) q_h(x) dx = 0, \forall q_h \in H_h\}$ , et les  $vec\{\psi_k\}$  sont donnés par :

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \psi_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad k \quad k + \frac{1}{2}, \dots, \psi_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

et nous notons  $\mathring{W}_h$  l'espace d'éléments finis de Lagrange  $P_1$  lié aux points  $x_k = kh$ .

Nous d'écrivons aussi  $\tilde{K}_h$  avec

$$\tilde{K}_h = Vec\{\varphi_k - \varphi_{k+1}\},$$

et

$$\tilde{K}_h \subset \mathring{W}_h \cap K_h.$$

Remarquons que si l'on note  $\Pi_h : C^0(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathring{W}_h$  l'opérateur d'interpolation de Lagrange sur les points  $x_k$ .

Notre objectif maintenant est de démontrer que :

$$|\Pi_h u_h(t) - u_e(t)|_{H^1(\Omega)} = O(h),$$

lorsque  $u_e$  est la solution exacte de :

$$a(u_e(t), w) = (f(t), w); \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \quad (2.81)$$

## 2.5 Analyse des difficultés d'un modèle bidomaine pour l'électrocardiologie

---

Tout d'abord nous donnons quelques résultats techniques :

**Lemme 2.5.1.**  $\forall \tilde{w}_h \in \tilde{K}_h$  nous avons :

$$a(\Pi_h u_h(t) - u_e(t), \tilde{w}_h) = a(\Pi_h u_{K_h}(t) - u_e(t), \tilde{w}_h).$$

**Preuve.**

On décompose  $\dot{V}_h = K_h \oplus K_h^\perp$ , l'orthogonalité est donnée par le produit scalaire induit par  $a(\cdot, \cdot)$ .

$$u_h(t) = u_{K_h}(t) + u_{\perp_h}(t), \quad u_{K_h} \in K_h \text{ et } u_{\perp_h} \in K_h^\perp.$$

Alors on a

$$a(\Pi_h(u_{K_h}(t) + u_{\perp_h}(t)) - u_e(t), \tilde{w}_h) = a(\Pi_h u_{K_h}(t) - u_e(t), \tilde{w}_h).$$

En effet, montrons que :

$$a(\Pi_h u_{\perp_h}(t), \tilde{w}_h) = 0; \quad \forall \tilde{w}_h \in \tilde{K}_h.$$

Nous savons que

$$a(\theta_h, \varphi_k) = 0; \quad \forall \theta \in S_h, \quad \forall \varphi_k \in \tilde{K}_h.$$

Car le support de  $\theta_h$  est restreint à un élément et que  $(\varphi_k)' = \text{constante}$  avec  $\theta_h$  symétrique par rapport au noeud milieu de l'intervalle

$$a(\theta_h, \varphi_k) = 0 \quad 1 \leq k \leq m.$$

Ainsi,

$$u_{\perp_h}(t) = \Pi_h u_{\perp_h}(t) + s_h u_{\perp_h}(t), \quad u_{\perp_h} \in K_h^\perp \text{ et } s_h u_{\perp_h} \in S_h^\perp.$$

Puisque  $\varphi_k - \varphi_{k+1} \in \tilde{K}_h$ , on a

$$a(\Pi_h u_{\perp_h}(t), \varphi_k - \varphi_{k+1}) = 0.$$

## Chapitre 2. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

---

Par conséquence

$$0 = a(\Pi_h u_{\perp_h}(t) + S_h u_{\perp_h}(t), \varphi_k - \varphi_{k+1}) + a(\Pi_h u_{\perp_h}(t), \varphi_k - \varphi_{k+1}).$$

□

Ce lemme doit se généraliser si on conserve pour les fonctions bulles

$$a(\varphi_{k+\frac{1}{2}}, \varphi_j) = 0; \quad 1 \leq k \leq m \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq m+1.$$

**Lemme 2.5.2.** *Pour tout  $\tilde{w}_h \in \tilde{K}_h$ , on a*

$$a(\Pi_h u_{K_h}(t) - u_e(t), \tilde{w}_h) = 0.$$

**Preuve.**

Ecrivons :

$$u_{K_h}(t) = \Pi_h u_{K_h}(t) + \tilde{S}_h u_{K_h}(t), \quad u_{K_h} \in K_h \quad \text{et} \quad \tilde{S}_h u_{K_h} \in S_h.$$

Comme  $\tilde{w}_h \in \tilde{W}_h$ , alors

$$\begin{aligned} a(\Pi_h u_{K_h}(t) - u_e(t), \tilde{w}_h) &= (f(t), -\tilde{w}_h) + a(\Pi_h u_{K_h}(t), \tilde{w}_h) \\ &= (f(t), -\tilde{w}_h) + a(\Pi_h u_{K_h}(t) + \tilde{S}_h u_{K_h}(t), \tilde{w}_h), \end{aligned} \quad (2.82)$$

car  $a(\tilde{S}_h u_{K_h}(t), \tilde{w}_h) = 0$ .

On a donc

$$\begin{aligned} a(\Pi_h u_{K_h}(t), \tilde{w}_h) &= a(u_{K_h}(t), \tilde{w}_h) \\ &= (f(t), -\tilde{w}_h). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Ainsi en déduit de (2.82) et (2.83) que :

$$a(\Pi_h u_{K_h}(t) - u_e(t), \tilde{w}_h) = 0; \quad \forall \tilde{w}_h \in \tilde{K}_h.$$

□

Donnons le résultat d'estimation d'erreur.

## 2.5 Analyse des difficultés d'un modèle bidomaine pour l'électrocardiologie

---

**Théorème 2.5.3.** *Supposant  $u_e(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , alors on a*

$$|\Pi_h u_h(t) - u_e(t)|_{H^1(\Omega)} \leq Ch |u_e(t)|_{H^2(\Omega)}. \quad (2.84)$$

**Remarque 2.5.4.** *Le théorème 2.5.3 implique qu'il n'est pas nécessaire d'un point de vue pratique de connaître une base de  $K_h$ , il suffit de prendre  $u_h(t)$  aux noeuds de Lagrange.*

**Preuve.**

Définissons  $\Pi_{\tilde{K}_h}$  l'interpolant de lagrange défini sur  $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$  à valeurs dans  $\tilde{K}_h = \text{Vec}\{\varphi_k - \varphi_{k+1}\}$ .

Remarquons que pour tout  $\varphi_k \in \mathring{W}_h$  on a

$$\varphi_k - \varphi_m = \sum_{p=k}^{m-1} (\varphi_p - \varphi_{p+1}); \quad 1 \leq k \leq m-1.$$

Cela permet de vérifier que  $\Pi_{\tilde{K}_h}$  est bien défini sur  $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$  et qu'il laisse invariant  $P_1$  l'ensemble des polynômes de degré 1 sur chaque segment  $(x_{i-1}, x_i)$ ;  $1 \leq i \leq m$ .

Pour une famille affine équivalente la théorie classique de l'interpolation ( voir [16]) permet d'obtenir :

$$|(I - \Pi_{\tilde{K}_h})\psi|_{1,(x_0,x_m)} \leq Ch |\psi|_2; \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Nous avons :

$$a(\Pi_h u_h(t) - u_e(t), \psi) = a(\Pi_h u_h(t) - u_e(t), \Pi_{\tilde{K}_h} \psi) + a(\Pi_h u_h(t) - u_e(t), (I - \Pi_{\tilde{K}_h})\psi). \quad (2.85)$$

Le lemme 2.5.2 implique que

$$a(\Pi_h u_h(t) - u_e(t), \Pi_{\tilde{K}_h} \psi) = 0. \quad (2.86)$$

Choisissons  $\psi = \Pi_h u_h(t) - u_e(t)$ , remarquant que

$$(I - \Pi_{\tilde{K}_h})\Pi_h u_h(t)|_{(x_0,x_m)} = 0,$$

## Chapitre 2. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

---

car  $\Pi_{\tilde{K}_h}$  laisse invariant les fonctions continues polynômiales de degré 1 par morceaux sur  $(x_{k-1}, x_k)$ ;  $1 \leq k \leq m$  s'annulant en  $x_0$ .

En déduit de (2.85) que

$$\begin{aligned} \alpha |\Pi_h u_h(t) - u_e(t)|_1^2 &= a(\Pi_h u_h(t) - u_e(t), (I - \Pi_{\tilde{K}_h})\psi) \\ &\leq |||a||| |\Pi_h u_h(t) - u_e(t)|_1 |(I - \Pi_{\tilde{K}_h})u_e(t)|_{1, (x_0, x_m)} \\ &\quad + |||a||| |\Pi_h u_h(t) - u_e(t)|_1 \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\partial_x \Pi_h u_h(t))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donnons une estimation de  $\partial_x u_h(t)$ .

Nous avons

$$a(u_{K_h}(t), w_h) = (f(t), w_h); \quad \forall w_h \in K_h.$$

Prenons

$$w_h = \varphi_m u_{K_{hm}}(t) + \varphi_{m+\frac{1}{2}} u_{K_{hm+1}}(t),$$

il vient

$$\begin{aligned} (\sigma_e + \sigma_i) \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \frac{u_{K_{hi}} - u_{K_{hi-1}}}{h} \right)^2 + u_{K_{hi+\frac{1}{2}}}^2 (\partial_x u_{\varphi_{i+\frac{1}{2}}})^2 \\ = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) (u_{K_{hi-1}} \varphi_{i-1} + u_{K_{hi}} \varphi_i + u_{K_{hi+\frac{1}{2}}} \varphi_{i+\frac{1}{2}}) dx. \end{aligned}$$

On intègre par parties et appliquant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) (u_{K_{hi-1}} \varphi_{i-1} + u_{K_{hi}} \varphi_i + u_{K_{hi+\frac{1}{2}}} \varphi_{i+\frac{1}{2}}) dx = \\ \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left\{ -\tilde{f} \left[ \frac{u_{K_{hi}} - u_{K_{hi-1}}}{h} + u_{K_{hi+\frac{1}{2}}} \partial_x \varphi_{i+\frac{1}{2}} \right] + ((\tilde{f} u_{K_h})(x_i) - (\tilde{f} u_{K_h})(x_{i-1})) \right\} \end{aligned}$$

## 2.5 Analyse des difficultés d'un modèle bidomaine pour l'électrocardiologie

---

$$\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tilde{f}^2 dx + \alpha \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \frac{u_{K_{hi}} - u_{K_{hi-1}}}{h} \right)^2 dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\partial_x \varphi_{\varphi_{i+\frac{1}{2}}})^2 u_{\varphi_{i+\frac{1}{2}}}^2 dx,$$

avec

$$\tilde{f}(x, t) = \int_{x_{i-1}}^x f(x, t) ds \leq h \|f\|_{L^\infty(\Omega)},$$

d'où

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \frac{u_{K_{hi}} - u_{K_{hi-1}}}{h} \right)^2 dx \leq h^2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Comme  $u_e(t) \in H^2(\Omega)$  implique  $|(I - \Pi_{\tilde{K}_h})u_e(t)|_{H^1(\Omega)} \leq Ch|u|_{H^2(\Omega)}$ , d'où

$$|\Pi_h u_h(t) - u_e(t)|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{|||a|||}{\alpha} Ch|u|_{H^2(\Omega)}.$$

□

En conclusion, nous avons une méthode optimale en espace pour résoudre un problème parabolique dégénéré.

## Chapitre 2. Approximation réduite pour l'opérateur en temps dans le cas de problèmes paraboliques

---

## Chapitre 3

# Comportement asymptotique des polynômes $L^p$ extrémaux associés à une mesure concentrée sur le cercle plus une partie discrète infinie



## 3.1 Notations et définitions

Soit  $\alpha$  une mesure positive, finie, non discrète et définie sur la tribu Borélienne  $\mathcal{B}(\mathbb{C})$  de  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}$  étant muni de sa topologie usuelle.

Pour  $0 < p < \infty$  et pour toute fonction mesurable à valeurs complexes définie sur  $\mathbb{C}$ , on pose :

$$\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p d\alpha(z).$$

On désigne par  $L^p(\alpha, \mathbb{C})$  l'espace vectoriel de toutes les fonctions mesurables pour lesquelles  $\|f\|_p < \infty$ . L'intégrale  $\int_{\mathbb{C}} |f|^p d\alpha$ , étant l'intégrale de Lebesgue relativement à la mesure  $\alpha$  et à l'espace mesurable  $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ .

On note par  $\mathbb{P}_{n,1}$  l'ensemble des polynômes normalisés  $Q_n(z)$  c'est-à-dire

$$Q_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0; \quad a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

On suppose dans tout ce qui suit que

$$z^n \in L^p(\alpha, \mathbb{C}) \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

**Définition 3.1.1.** Soit  $\alpha$  une mesure positive finie, non discrète définie sur  $\mathcal{B}(\mathbb{C})$  et  $F$  son support. On appelle polynôme  $L^p$  extrémal noté par  $T_{n,p}$  et associé à la mesure  $\alpha$  la solution du problème extrémal suivant :

$$\|T_{n,p}\|_{L^p(\alpha, F)} = \min_{Q_n \in \mathbb{P}_{n,1}} \{\|Q_n\|_{L^p(\alpha, F)}\}. \quad (3.3)$$

### 3.1.1 Comportement asymptotique

Un des principaux et des plus difficiles problèmes associés aux polynômes  $L^p$  extrémaux est celui de leur comportement asymptotique quand  $n \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire :

**Définition 3.1.2.** On appelle problème du comportement asymptotique des polynômes  $L^p$  extrémaux  $T_{n,p}$  associés à la mesure  $\alpha$ , la recherche d'un équivalent à  $T_{n,p}$  quand  $n$  devient grand.

## 3.2 Espace de Hardy

---

La solution de ce problème dépend en général de la mesure  $\alpha$  et de son support  $F$ .

## 3.2 Espace de Hardy

Les espaces de Hardy constituent l'espace fonctionnel de base pour étudier les comportements asymptotiques des polynômes  $L^p$  extrémaux.

Les espaces de Hardy notés  $H^p$  sont des sous-espaces de l'ensemble des fonctions holomorphes, définis par des conditions de croissance. Ils ont été introduit en 1915 par G. H. Hardy [23] qui les a étudiés dans le disque unité ouvert. Les propriétés caractéristiques des espaces  $H^p$  sont les propriétés de factorisation, de valeurs frontières et de représentation du type Cauchy à partir de mesures sur la frontière. Nous allons d'abord définir quelques notions qui nous seront utiles tout en adoptant dans tout ce qui suit les notations suivantes :

$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  est le disque unité.

$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  est le cercle unité.

$H(\Delta)$  désigne l'ensemble des fonctions holomorphes dans  $\Delta$ .

### 3.2.1 Espace de Hardy $H^p(\Delta)$

**Définition 3.2.1.** Soit  $f \in H(\Delta)$ , nous définissons pour  $p > 0$  et pour tout  $r$  ( $0 \leq r < 1$ ) :

$$\mathcal{M}_p^p(f, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta. \quad (3.4)$$

Les fonctions  $\mathcal{M}_p$  sont monotones croissantes sur  $[0, 1[$ , ce qui permet d'établir la définition suivante :

**Définition 3.2.2.** Pour tout  $f \in H(\Delta)$  et pour  $p > 0$ , on pose

$$\|f\|_p = \sup_{0 \leq r < 1} \mathcal{M}_p(f, r). \quad (3.5)$$

La classe  $H^p(\Delta)$  est définie comme l'ensemble des fonctions  $f \in H(\Delta)$  pour lesquelles  $\|f\|_p < \infty$ .

On peut redéfinir les espaces de Hardy  $H^p(\Delta)$  ( pour  $0 < p \leq \infty$  ) de la façon suivante :

**Corollaire 3.2.3.** Pour  $0 < p \leq \infty$  nous avons

$$H^p(\Delta) = \{f \in H(\Delta) : \lim_{r \rightarrow 1^-} \mathcal{M}_p(f, r) < \infty\}.$$

**Théorème 3.2.4.** [43] Pour  $1 \leq p < \infty$ , l'espace  $(H^p(\Delta), \|\cdot\|_p)$  est un espace de Banach. Pour  $0 < p < 1$  l'espace  $H^p(\Delta)$  est un espace métrique muni de la distance  $d(f, g) = \|f - g\|_p^p$ .

### Limite radiale

**Théorème 3.2.5.** Si  $p > 0$  et si  $f \in H^p(\Delta)$  alors  $f$  possède une limite radiale noté  $f^*$  telle que  $f^* \in L^p(\Gamma)$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta}) = f^*(e^{i\theta}),$$

presque partout sur le cercle  $\Gamma$  et

$$\|f\|_p = \|f^*\|_{L^p(\Gamma)}.$$

Pour son utilité, on reproduit la preuve du théorème 3.2.5.

#### Preuve.

On sait que dans ce cas ( voir théorème 3.2.8 en dessous ), on peut écrire que  $f(z) = B(z).g(z)$ , où  $B(z)$  est le produit de Blaschke formé sur les zéros de  $f$  et  $g$  une fonction de  $H^p(\Delta)$  n'ayant pas de zéros dans  $\Delta$  telle que  $\|f\|_p = \|g\|_p$  et  $g(z) = h(z)^{\frac{1}{p}}$  alors  $h \in H^1(\Delta)$  et

$$\|h\|_1 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sup \int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\theta})| d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |h(e^{i\theta})| d\theta,$$

### 3.2 Espace de Hardy

---

où  $h(e^{i\theta})$  est la limite radiale de  $h(z)$ .

On suppose pour la suite que  $f \neq 0$ . De plus, on sait que pour tout  $\theta$ ,  $h(e^{i\theta}) \neq 0$  et ainsi pour tout  $\theta$

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} g(z) = \lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} h(z)^{\frac{1}{p}},$$

on appellera cette limite  $g(e^{i\theta})$ .

Alors puisque

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} B(z) = B^*(e^{i\theta}); \text{ pour tout } \theta,$$

donc

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f(z) = B^*(e^{i\theta})g(e^{i\theta}),$$

on appellera cette limite  $f^*(e^{i\theta})$ .

Finalement,

$$\|f\|_p^p = \|g\|_p^p = \|h\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |h(e^{i\theta})| d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta})|^p d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |f^*(e^{i\theta})|^p d\theta,$$

car  $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ .  $\square$

**Théorème 3.2.6.** [27] Soit  $f \in H^p(\Delta)$  alors

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - f^*(e^{i\theta})|^p d\theta = 0,$$

où  $f^*(e^{i\theta})$  est la limite radiale de  $f(z)$ .

Du théorème 3.2.6 découle le corollaire suivant :

**Corollaire 3.2.7.** [27, 43] Soit  $f \in H^p(\Delta)$  alors  $f$  est égale à l'intégrale de Poisson et à l'intégrale de Cauchy de sa limite radiale  $f^*(e^{i\theta})$ , on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Theta_r(\theta - t) f^*(e^{i\theta}) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f^*(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

### Théorème de factorisation

Tout fonction  $f \in H^p(\Delta)$  non identiquement nulle, peut se factoriser en un produit de Blaschke sur les zéros de  $f$  et une fonction  $g \in H^p(\Delta)$  n'ayant pas de zéros dans  $\Delta$ .

**Théorème 3.2.8.** [27] Soit  $f \in H^p(\Delta)$  et soit  $B(z)$  le produit de Blaschke formé sur les zéros de  $f$  telle que :

$$f(z) = B(z) \cdot [g(z)]^{\frac{1}{p}}; \quad \forall z \in \Delta,$$

alors  $g \in H^1(\Delta)$  et  $g$  n'a pas de zéros dans  $\Delta$ .

**Remarque 3.2.9.** Comme  $B(z) \leq 1$  dans  $\Delta$  alors il vient du théorème de factorisation ci-dessus que :

$$\sup_{r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta = \sup_{r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})| d\theta,$$

et donc  $\|f\|_p = \|g\|_1$ .

### 3.2.2 Espace de Hardy $H^p(G)$

Notons par  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$ , et par  $H(G)$  l'ensemble des fonctions holomorphes dans  $G$  et par  $C_r$  l'application  $C_r : [-\pi, +\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ , définie par  $C_r(\theta) = re^{i\theta}$ ,  $r > 0$ . Ici, on confond l'application avec son orbite  $C_r([-\pi, +\pi])$ .

**Définition 3.2.10.** Soit  $f \in H(G)$ , on dit que  $f \in H^p(G)$  si et seulement si :  $\exists C > 0$ ,  $C$  indépendant de  $r$ , tel que

$$\int_{C_r} |f(z)|^p |dz| \leq C; \quad 1 < r \leq 2.$$

L'espace  $H^p(G)$  est muni de la norme  $\|f\|_{H^p(G)}^p = \sup_{1 < r \leq 2} \int_{C_r} |f(z)|^p |dz|$  est un espace de Banach pour  $p \geq 1$ . Pour  $0 < p < 1$ ,  $H^p(G)$  est un espace métrique pour la distance  $d(f, g) = \|f - g\|_{H^p(G)}^p$ .

### 3.2 Espace de Hardy

---

**Remarque 3.2.11.** On peut définir  $H^p(G)$  à partir de l'espace  $H^p(\Delta)$ . En effet, soit  $f \in H^p(G)$ , définissons la fonction  $\Phi : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$  par

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= f\left(\frac{1}{z}\right); \quad \text{pour } z \in \Delta \setminus \{0\}, \\ \Phi(0) &= f(\infty).\end{aligned}$$

Alors  $f \in H^p(G)$  si et seulement si  $\Phi \in H^p(\Delta)$ .

Notons par :

$L^p(C_r, |d\xi|) = \{f : C_r \longrightarrow \mathbb{C} / \int_{C_r} |f(\xi)|^p |d\xi| < \infty\}$ , où  $|d\xi|$  est la mesure longueur d'arc, nous résumons les propriétés  $H^p(G)$  dans le théorème suivant :

**Théorème 3.2.12.** Soit  $f \in H^p(G)$ , alors

(a)-  $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$  existe en presque tous les points du cercle unité  $\Gamma$ , cette limite s'appelle limite radiale de la fonction  $f$ , on la note  $\tilde{f}$ . D'autre part  $\tilde{f} \in L^p(C_r, |d\xi|)$  et

$$\int_{C_1} |\tilde{f}(\xi)|^p |d\xi| = \|f\|_{H^p(G)}^p = \sup_{1 < r \leq 2} \int_{C_r} |f(\xi)|^p |d\xi|$$

(b)-  $\tilde{f}$  admet une représentation du type Cauchy et du type Poisson de la manière suivante :  $\forall f \in H^p(G) \setminus \{\infty\}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\tilde{f}(\xi)}{\xi - z} \frac{|d\xi|}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \Theta_r(\theta - t) \tilde{f}(e^{it}) dt.$$

**Preuve.**

Soit  $f \in H^p(G)$ ; alors  $\exists C > 0$  tel que  $\int_{C_r} |f(z)|^p |dz| \leq C$ ;  $1 < r \leq 2$ .

Effectuons le changement de variable suivant :

$$z = \frac{1}{w} \Rightarrow dz = -\frac{1}{w^2} dw,$$

ainsi

$$\int_{C_r} |f(z)|^p |dz| = \int_{C_{r'}} \left|f\left(\frac{1}{w}\right)\right|^p \frac{1}{w^2} |dw| = \frac{1}{r'} \int_0^{2\pi} \left|f\left(\frac{1}{r' e^{i\theta}}\right)\right|^p d\theta, \quad \frac{1}{2} \leq r' < 1,$$

donc

$$\int_0^{2\pi} |f(\frac{1}{r'e^{i\theta}})|^p |d\theta| \leq r'C < C,$$

ce qui implique

$\tilde{f} \in H^p(G)$  et que  $\lim_{r' \rightarrow 1^-} \tilde{f}(r'e^{i\theta})$  existe presque partout pour  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Comme

$$\lim_{r' \rightarrow 1^-} \tilde{f}(r'e^{i\theta}) = \lim_{r' \rightarrow 1^-} f(\frac{1}{r'e^{i\theta}}) = \lim_{r \rightarrow 1^+} f(re^{i\theta}),$$

la limite radiale existe presque partout sur le cercle  $\Gamma$ .

Le fait que la limite radiale  $\tilde{f}$  admette une représentation du type Cauchy et Poisson est une conséquence des propriétés de la limite radiale dans  $H^p(\Delta)$ .  $\square$

### 3.2.3 Produit de Blaschke

On sait que si  $Z(f)$  est l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe non constante définie sur un domaine  $\Omega$  alors  $Z(f)$  ne possède pas de points d'accumulation dans  $\Omega$ . On sait aussi que tout sous-ensemble  $A$  inclus dans  $\Omega$  et sans point d'accumulation dans  $\Omega$  est un  $Z(f)$  pour au moins une fonction  $f$  appartenant à  $H(\Omega)$ . Cependant, on ne peut rien dire de plus, en général, au sujet de  $Z(f)$  si l'impose aucune condition sur la fonction  $f$ . Mais la situation est bien différente si l'on remplace  $H(\Omega)$  par certains sous-ensemble de  $H(\Omega)$  définis par des conditions de croissance comme l'espace de Hardy  $H^p(\Omega)$ . Dans ce cas, la distribution des zéros doit satisfaire certaines conditions quantitatives et c'est la formule de Jensen qui rend possible la détermination explicite des conditions que les zéros d'une fonction non constante  $f \in H^p(\Omega)$  doivent satisfaire.

#### La formule de Jensen

La formule de Jensen procure une égalité où interviennent les valeurs frontières des fonctions holomorphes bornées sur le disque unité ouvert  $\Delta$ , elle est donnée

## 3.2 Espace de Hardy

---

par le théorème 3.2.13 suivant :

**Théorème 3.2.13.** [43] Soit  $\Omega = \Delta(0, r_1)$  et  $f \in H(\Omega)$  telle que  $f(0) \neq 0$ . On prend  $0 < r < r_1$  et on note  $z_1, \dots, z_n$  les zéros de  $f$  appartenant à  $\overline{\Delta(0, r)}$ , rangés avec leur ordre de multiplicité. On a

$$|f(0)| \prod_{k=1}^n \frac{r}{|z_k|} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta\right\}.$$

**Remarque 3.2.14.** L'hypothèse  $f(0) \neq 0$  ne peut être gênante puisque si  $f$  a un zéro d'ordre  $m$  en 0, il suffira d'appliquer cette formule à  $\frac{f(z)}{z^m}$ .

### Produit de Blaschke

**Théorème 3.2.15.** [27, 43] Soit  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  une suite dans  $\Delta$  telle que  $z_k \neq 0$  pour laquelle

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|z_k| - 1) < \infty.$$

Si  $k$  est un entier non négatif, et si l'on pose

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_k}{z \bar{z}_k - 1} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|}; \quad z \in \Delta, \quad (3.6)$$

la fonction  $B$  est une fonction holomorphe bornée dans  $\Delta$  et ne possède pas d'autres zéros que les points  $z_k$ .

**Définition 3.2.16.** La fonction  $B$  définie dans le théorème 3.2.15 est appelée produit de Blaschke classique.

**Remarque 3.2.17.** Le terme “produit de Blaschke” pourra être utilisé pour le cas d'un nombre fini de facteurs, et éventuellement s'il n'y a pas du tout, en posant  $B(z) = 1$ .

Les propriétés décrivant le comportement du produit de Blaschke au voisinage de la frontière de  $\Delta$  sont données dans le théorème suivant :



**Théorème 3.2.18.** [27, 43] La fonction  $B(z)$  admet en presque partout sur le cercle  $\Gamma$  une limite radiale  $B^*(e^{i\theta})$  donnée par

$$B^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1^-} B(re^{i\theta}),$$

de plus,  $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ .

Le produit de Blaschke ainsi que ses propriétés peuvent être introduit d'une autre façon autre que celle donnée par les théorèmes 3.2.15 et 3.2.18 c'est l'objet du lemme suivant :

**Lemme 3.2.19.** Soit  $\{z_k\}_{k=1}^\infty$  une suite dans  $G$  telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < \infty.$$

Si  $k$  est un entier non négatif, et si l'on pose

$$\tilde{B}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_k}{z\bar{z}_k - 1} \frac{|z_k|^2}{z_k}; \quad z \in G, \quad (3.7)$$

alors la fonction  $\tilde{B}$  est aussi appelée produit de Blaschke et possède les propriétés suivante :

1-  $\tilde{B} \in H^p(G)$ ,  $\tilde{B}(\infty) = 1$ ,

2-  $\tilde{B}(z)$  admet en presque partout sur le cercle  $\Gamma$  une limite radiale  $\tilde{B}^*(e^{i\theta})$  donnée par :

$$\lim_{r \rightarrow 1^+} \tilde{B}(re^{i\theta}) = \tilde{B}^*(e^{i\theta}),$$

3-  $|\tilde{B}^*(e^{i\theta})| = \prod_{k=1}^{\infty} |z_k|$ .

4- Si  $\varphi \in H^p(G)$ , telle que  $\varphi(\infty) = 1$  et  $\varphi(z_k) = 0$ ,  $k = 1, \dots$ , alors

$$\frac{\varphi}{\tilde{B}} \in H^p(G) \text{ et } \left(\frac{\varphi}{\tilde{B}}\right)(\infty) = 1.$$

## 3.2 Espace de Hardy

### 3.2.4 Fonction de Szegö

Comme on le verra plus tard, la formule asymptotique des polynômes  $L^p$  extrémaux s'exprime essentiellement en fonction des fonctions de Szegö ( qui représentent la partie absolument continue de la mesure  $\alpha$  ). Les fonctions de Szegö rentrent dans le cadre général de la représentation des fonctions positives.

Soit  $g \in H^p(\Delta)$  et  $\tilde{g}$  la limite radiale de  $g$  qui existe presque partout sur le cercle  $\Gamma$ . Posons  $f(\theta) = |\tilde{g}(e^{i\theta})|$ . On montre que  $f \in L^p([-\pi, \pi], d\theta)$  et aussi que  $\log(f) \in L^1([-\pi, \pi], d\theta)$ , voir [47]. Réciproquement si  $f \in L^p([-\pi, \pi], d\theta)$ ,  $f$  presque partout positive et  $\log(f) \in L^1([-\pi, \pi], d\theta)$ ; on montre [44, 45] qu'il existe infinité de fonctions  $g \in H^p(\Delta)$  tel que  $f(\theta) = |\tilde{g}(e^{i\theta})|$ , presque partout pour  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ .  $\tilde{g}$  étant la limite radiale de  $g$ .

Parmi les fonctions de type  $g$ , on peut construire une fonction particulière dite fonction de Szegö et dont les propriétés se trouvent dans le théorème suivant :

**Théorème 3.2.20.** *Soit  $f$  une fonction non négative définie sur  $[-\pi, \pi]$  tel que  $f \in L^1([-\pi, \pi], d\theta)$  et  $\log(f) \in L^1([-\pi, \pi], d\theta)$ , alors la fonction suivante*

$$\mathcal{D}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi} \log(f(e^{i\theta})) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta\right\}, \quad (|z| < 1), \quad (3.8)$$

dîte fonction de Szegö associée au domaine  $\Delta$  et à la fonction  $f$  possède les propriétés suivantes :

- (i)  $\mathcal{D} \in H^p(\Delta)$ .
- (ii)  $\mathcal{D}(z) \neq 0$ ;  $z \in \Delta$ .
- (iii)  $|\mathcal{D}(e^{i\theta})|^p = f(\theta)$ ; presque partout sur  $\Gamma$ , où  $\mathcal{D}(e^{i\theta})$  est la limite radiale de  $\mathcal{D}$ .
- (vi)  $\mathcal{D}(0) > 0$ .

**Preuve.** Soit  $f$  une fonction non négative telle que  $f \in L^1([-\pi, \pi], d\theta)$  et  $\log(f) \in L^1([-\pi, \pi], d\theta)$ . Considérons l'intégrale de Poisson  $P(re^{i\theta})$  associées à la fonction

$\log(f)$  donnée par :

$$P(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} \log(f(t)) dt,$$

et qui possèdent deux propriétés essentielles [43], à savoir que  $P$  est harmonique dans le disque unité ouvert  $\Delta$  et qu'elle représente la partie réelle d'une certaine fonction holomorphe que l'on notera  $h(z)$ . On supposera que  $h(0)$  est réel pour avoir l'unicité de  $h$ . La fonction cherchée sera alors

$$g(z) = \exp\left\{\frac{1}{2}h(z)\right\},$$

c'est-à-dire  $\mathcal{D}(z) = g(z)$  et  $\operatorname{Re}[\mathcal{D}(z)] = P(re^{i\theta})$  pour  $z = re^{i\theta}$ ,  $0 \leq r < 1$ .

En effet,

(i) Montrons qu'il existe  $c > 0$  tel que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta \leq c, \quad \forall r, 0 \leq r < 1.$$

Soit  $z = re^{i\theta}$

$$\log(g(z)) = \log(|g(z)|) + i \arg(g(z)) = \frac{1}{2}h(z),$$

ainsi  $\log(|g(z)|) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}[h(z)]$ , ou en utilisant la formule de Jensen et on intègre par rapport à  $\theta$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})|^p d\theta &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} f(t) dt \right\} d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)} d\theta \right\} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = c. \end{aligned}$$

(ii) est évident.

(iii) Notons par  $g(e^{i\theta})$  la limite radiale de  $g$ ,

$$|g(re^{i\theta})|^p = \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} \log(f(t)) dt\right\},$$

### 3.2 Espace de Hardy

---

mais

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1^-} |g(re^{i\theta})|^p &= |g(e^{i\theta})|^p = \exp\left\{ \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} \log(f(t)) dt \right\} \\ &= \exp\{\log(f(\theta))\}, \text{ presque partout pour } -\pi < \theta < \pi, \end{aligned}$$

voir [43, p 220]. On obtient alors

$$|g(e^{i\theta})|^p = f(\theta), \text{ presque partout pour } -\pi < \theta < \pi.$$

(vi) On a

$$g(0) = \exp\left\{\frac{1}{2}h(0)\right\} > 0.$$

Il n'est pas difficile de montrer que  $\mathcal{D}(z) = g(z)$ , et la construction de la fonction de Szegö est terminée.  $\square$

**Théorème 3.2.21.** *Soit  $\rho$  une fonction non négative telle que  $\rho \in L^1([-\pi, \pi], d\theta)$  et  $\log(\rho) \in L^1([-\pi, \pi], d\theta)$ , alors il existe une fonction unique notée  $\mathcal{D}_G$ , appelée fonction de Szegö associée à l'extérieur du disque unité  $G$  et à la fonction poids  $\rho$  satisfaisant les propriétés suivantes :*

(i)  $\mathcal{D}_G \in H^p(G).$

(ii)  $\mathcal{D}_G(z) \neq 0; z \in G.$

(iii)  $|\mathcal{D}_G(e^{i\theta})|^p = \rho(\theta)$  ; presque partout sur  $\Gamma$ , où  $\mathcal{D}_G(e^{i\theta})$  est la limite radiale de  $\mathcal{D}_G$ .

(vi)  $\mathcal{D}_G(\infty) > 0.$

**Preuve.** Les propriétés de la fonction  $\mathcal{D}_G$  découle de celles de la fonction de Szegö  $\mathcal{D}$  associée à l'intérieur du disque unité ouvert  $\Delta$ .  $\square$

**Remarque 3.2.22.** *La fonction  $\mathcal{D}_G$  peut être construite à partir de la fonction  $\mathcal{D}$  de la façons suivante :*

$$\mathcal{D}_G(z) = \mathcal{D}\left(\frac{1}{z}\right); \quad z \in G \setminus \{\infty\}, \quad (3.9)$$

$$\mathcal{D}_G(\infty) = \mathcal{D}(0). \quad (3.10)$$

### 3.3 Espace de Hardy $H^p(G, \rho)$

$H^p(G, \rho)$  est l'espace fonctionnel de base pour l'étude du comportement asymptotique des polynômes  $L^p$  extrémaux  $T_{n,p}$ , lorsque la mesure  $\alpha$  est concentré sur l'ensemble  $F = \Gamma \cup \{z_k\}_{k=1}^\infty$ , avec  $|z_k| > 1$ . Les formules asymptotiques des polynômes  $L^p$  extrémaux seront déduites à partir de valeurs optimales de problèmes extrémaux dans l'espace  $H^p(G, \rho)$ .

**Définition 3.3.1.** Soit  $G$  l'extérieur du disque unité et  $\mathcal{D}_G$  la fonction de Szegő associée au domaine  $G$  et à la fonction poids  $\rho$  vérifiant les conditions du théorème 3.2.21. On dit qu'une fonction  $f \in H(G)$  est dans  $H^p(G, \rho)$  si et seulement si

$$f \cdot \mathcal{D}_G \in H^p(G).$$

Les propriétés de l'espace  $H^p(G, \rho)$  sont données dans le théorème suivant :

**Théorème 3.3.2.** [42] Soit  $f \in H^p(G, \rho)$ , alors :  $f$  admet presque partout sur le cercle unité  $\Gamma$  une limite radiale notée  $f^*$ . De plus

$$- f^* \in L^p(\Gamma, \rho(\xi)|d\xi|) \text{ où}$$

$$L^p(\Gamma, \rho(\xi)|d\xi|) = \{f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C} : \int_{\Gamma} |f(\xi)|^p \rho(\xi) |d\xi| < +\infty\}.$$

$$- \text{Pour } p \geq 1, \text{ et pour tout } f \in H^p(G, \rho) \text{ posons :}$$

$$\|f\|_{H^p(G, \rho)}^p = \int_{\Gamma} |f^*(\xi)|^p \rho(\xi) |d\xi| < +\infty,$$

l'espace  $(H^p(G, \rho), \|\cdot\|_{H^p(G, \rho)})$  est un espace de Banach.

Pour  $0 < p < 1$ , l'espace  $H^p(G, \rho)$  est un espace métrique pour la distance  $d(f, g) = \|f - g\|_{H^p(G, \rho)}^p$ .

Parmi les caractéristiques de l'espace de Hardy  $H^p(G, \rho)$ , nous en citons deux que nous formulons dans les lemmes suivants :

### 3.4 Familles Normales

---

**Lemme 3.3.3.** [24] Si  $f \in H^p(G, \rho)$  et  $K \subset G, K$  compact alors il existe une constante  $C(K)$  telle que

$$\sup_K |f(z)| \leq C(K) \|f\|_{H^p(G, \rho)}^p. \quad (3.11)$$

**Lemme 3.3.4.** Soit  $\{f_n\}$  une suite de fonctions dans  $H^p(G, \rho)$  et

- 1)-  $f_n \rightarrow f$  uniformément sur les sous ensembles compacts de  $G$ ,
- 2)-  $\|f_n\|_{H^p(G, \rho)}^p \leq M$  (const),

alors

$$f \in H^p(G, \rho) \quad \text{et} \quad \|f\|_{H^p(G, \rho)}^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{H^p(G, \rho)}^p. \quad (3.12)$$

**Preuve.** Soit  $0 < p \leq \infty$ , on a la fonction  $f$  est analytique dans  $G$  et

$$\frac{1}{r} \int_{C_r} |f(z)|^p |\mathcal{D}_G(z)|^p |dz| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_{C_r} |f_n(z)|^p |\mathcal{D}_G(z)|^p |dz| \leq M, (1 < r \leq 2)$$

ceci implique que  $f \in H^p(G, \rho)$ . On suppose maintenant  $M^* = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{H^p(G, \rho)}^p$ , alors il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n > n_0$  on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_{C_r} |f_n(z)|^p |\mathcal{D}_G(z)|^p |dz| \leq M^* + \varepsilon.$$

Donc  $\|f\|_{H^p(G, \rho)}^p \leq M^* + \varepsilon, \forall \varepsilon. \square$

### 3.4 Familles Normales

**Définition 3.4.1.** On considère une famille  $\Lambda \subset H(O)$  pour un ouvert  $O$  du plan complexe  $\mathbb{C}$ . On appelle  $\Lambda$  une famille normale (ou famille de Montel) si toute suite d'éléments de  $\Lambda$  contient une sous suite qui converge uniformément sur les sous ensembles compacts de  $O$ .

**Théorème 3.4.2.** [43] On suppose que  $\Lambda \subset H(O)$  et  $\Lambda$  uniformément bornée sur tout compact inclus dans  $O$ . Alors  $\Lambda$  est une famille normale.

### 3.5 Problèmes extrémaux dans l'espace $H^p(G, \rho)$

Les problèmes extrémaux que nous allons introduire dans l'espace de Hardy  $H^p(G, \rho)$  permettront via les propriétés caractéristiques du même espace et qui se résument dans les lemmes 3.3.3 et 3.3.4 d'élaborer les formules asymptotiques des polynômes  $L^p$  extrémaux  $T_{n,p}$ .

Pour  $0 < p < \infty$ , nous associons aux mesures  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement les constantes extrémales  $m_{n,p}(\alpha)$ ,  $m_{n,p}(\beta)$  et les polynômes extrémaux notés  $T_{n,p}(z)$ ,  $T_{n,p,\beta}(z)$  tels que

$$m_{n,p}(\alpha) = \|T_{n,p}\|_{L^p(\alpha, F)} = \inf_{Q_n \in \mathbb{P}_{n,1}} \{\|Q_n\|_{L^p(\alpha, F)}\}, \quad (3.13)$$

où

$$\|g\|_{L^p(\alpha, F)}^p = \int_{\Gamma} |g(\xi)|^p \rho(\xi) |d\xi| + \sum_{k=1}^{\infty} A_k |g(z_k)|^p,$$

et

$$m_{n,p}(\beta) = \|T_{n,p,\beta}\|_{L^p(\beta, \Gamma)} = \inf_{Q_n \in \mathbb{P}_{n,1}} \{\|Q_n\|_{L^p(\beta, \Gamma)}\}, \quad (3.14)$$

avec

$$\|g\|_{L^p(\beta, \Gamma)}^p = \int_{\Gamma} |g(\xi)|^p \rho(\xi) |d\xi|.$$

Notons par  $\mu(\beta)$  et  $\mu(\alpha)$  les valeurs optimales associées respectivement aux problèmes extrémaux suivants :

$$\mu(\beta) = \inf \{\|\varphi\|_{H^p(G, \rho)}^p, \quad \varphi \in H^p(G, \rho), \quad \varphi(\infty) = 1\}, \quad (3.15)$$

$$\mu(\alpha) = \inf \{\|\varphi\|_{H^p(G, \rho)}^p, \quad \varphi \in H^p(G, \rho), \quad \varphi(\infty) = 1, \quad \text{et} \quad \varphi(z_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots\}. \quad (3.16)$$

Si on note par  $\varphi^*$  et  $\psi^*$  respectivement les fonctions extrémales des problèmes (3.15) et (3.16), on a :

### 3.5 Problèmes extrémaux dans l'espace $H^p(G, \rho)$

---

**Lemme 3.5.1.** *Les solutions optimales  $\varphi^*$  et  $\psi^*$  sont liées par la relation suivante :*

$$\psi^*(z) = \varphi^*(z) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_k}{z \cdot \bar{z}_k - 1} \cdot \frac{|z_k|^2}{z_k}, \quad (3.17)$$

et

$$\mu(\beta) = \left( \prod_{k=1}^{\infty} |z_k| \right)^{-p} \cdot \mu(\alpha). \quad (3.18)$$

**Preuve.** On sait d'après le lemme 3.2.19 que le produit de Blaschke infini  $\tilde{B}(z)$  est borné, analytique dans  $G$ ,  $\tilde{B}(\infty) = 1$  et admet un prolongement continu sur  $\Gamma$  et  $|\tilde{B}(\xi)| = \prod_{k=1}^{\infty} |z_k|$  ( $\tilde{B}(\xi) = \lim_{z \rightarrow \xi} \tilde{B}(z)$ ).

Si  $\phi \in H^p(G, \rho)$ ,  $\phi(\infty) = 1$  et  $\phi(z_k) = 0, k = 1, 2, \dots$  alors

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{\tilde{B}(z)} \in H^p(G, \rho) \text{ et } f(\infty) = 1,$$

D'après la continuité de  $\tilde{B}(z)$  sur  $\Gamma$ , il vient que :

$$\|f\|_{H^p(G, \rho)}^p = \left( \prod_{k=1}^{\infty} |z_k| \right)^{-p} \cdot \|\phi\|_{H^p(G, \rho)}^p,$$

ce qui implique que

$$\mu(\beta) \leq \left( \prod_{k=1}^{\infty} |z_k| \right)^{-p} \cdot \mu(\alpha). \quad (3.19)$$

Inversement, pour  $f \in H^p(G, \rho)$ ,  $f(\infty) = 1$  on a

$$\phi(z) = f(z) \cdot \tilde{B}(z) \in H^p(G, \rho), \quad \phi(\infty) = 1, \text{ et } \phi(z_k) = 0, k = 1, 2, \dots,$$

ceci implique que

$$\mu(\alpha) \leq \left( \prod_{k=1}^{\infty} |z_k| \right)^p \cdot \mu(\beta). \quad (3.20)$$

(3.19), (3.20) donne (3.18).

D'autre part, pour la fonction

$$\psi^*(z) = \varphi^*(z) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_k}{z \cdot \bar{z}_k - 1} \cdot \frac{|z_k|^2}{z_k},$$



on a  $\psi^* \in H^p(G, \rho)$ ,  $\psi^*(\infty) = 1$  et elle réalise l'égalité

$$\|\psi^*\|_{H^p(G, \rho)}^p = \left( \prod_{k=1}^{\infty} |z_k| \right)^p \cdot \|\varphi^*\|_{H^p(G, \rho)}^p,$$

ce qui est exactement (3.17).  $\square$

La proposition suivante donne la forme explicite de  $\varphi^*$  ainsi que sa valeur optimale :

**Proposition 3.5.2.** *La solution optimal du problème (3.16) ainsi que sa valeur optimale sont données par :*

$$\mu(\beta) = \|\varphi^*\|_{H^p(G, \rho)}^p = \left\| \frac{\mathcal{D}_G(\infty)}{\mathcal{D}_G} \right\|_{H^p(G, \rho)}^p = \mathcal{D}_G(\infty)^p = \mathcal{D}(0)^p. \quad (3.21)$$

**Preuve.** Soit  $\varphi \in H^p(G, \rho)$  et  $\varphi(\infty) = 1$ , on a

$$\int_{C_r} |f(z) \mathcal{D}_G(z)|^p |dz| \geq [\varphi(\infty) \mathcal{D}_G(\infty)]^p = \mathcal{D}_G(\infty)^p.$$

En passant à la limite quand  $r \rightarrow 1^+$ , on obtient

$$\|\varphi\|_{H^p(G, \rho)}^p \geq [\mathcal{D}_G(\infty)]^p, \quad \forall \varphi \in H^p(G, \rho); \quad \varphi(\infty) = 1. \quad (3.22)$$

Si

$$\varphi^* = \frac{\mathcal{D}_G(\infty)}{\mathcal{D}_G(z)},$$

alors  $\varphi^* \in H^p(G, \rho)$  et  $\varphi^*(\infty) = 1$ , de plus  $\varphi^*$  réalise l'égalité dans (3.22) et on a

$$\|\varphi^*\|_{H^p(G, \rho)}^p = [\mathcal{D}_G(\infty)]^p.$$

Ceci montre que  $\varphi^*$  est la solution optimale du problème (3.16) et que les égalités dans (3.21) sont bien vérifiées.  $\square$

### 3.5.1 Classe de mesures §

Nous allons définir la classe de mesures qui va nous permettre d'étudier le comportement asymptotique des polynômes  $L^p$  extrémaux  $T_{n,p}$  lorsque ces mesures sont concentrées sur le cercle  $\Gamma$  plus un ensemble de points infini  $z_k$  situés à l'extérieur de  $\Gamma$ .

### 3.5 Problèmes extrémaux dans l'espace $H^p(G, \rho)$

---

**Définition 3.5.3.** On dira que  $\alpha = \beta + \gamma$  est une mesure de classe  $\mathbb{S}$  si la partie absolument continue  $\beta$  ( $\beta(\xi) = \rho(\xi)|d\xi|$ ) ainsi que la partie discrète  $\gamma$  ( $\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \delta_{z_k}$ ) de  $\alpha$  vérifient les conditions suivantes :

$$\int_{\Gamma} (\log \rho(\xi)) |d\xi| > -\infty \quad (3.23)$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|z_k| - 1) < \infty, \quad (3.24)$$

La condition (3.24) est une condition naturelle garantissant la convergence du produit de Blaschke infini  $\tilde{B}(z)$  associé aux points  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,

#### 3.5.2 Résultats

Nous sommes en mesure à présent de donner le premier résultat original [4] de cette étude concernant le comportement asymptotique des polynômes  $L^p$  extrémaux  $T_{n,p}$  associés à une mesure  $\alpha$  du type  $\alpha = \beta + \gamma$  ayant une partie discrète concentrée sur un nombre infini de points  $z_k$  situés à l'extérieur du cercle unité  $\Gamma$ .

**Théorème 3.5.4.** Soit  $\Gamma$  le cercle unité et  $\alpha \in \mathbb{S}$ , alors

- i)-  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_{n,p}(\alpha) = (\mu(\alpha))^{\frac{1}{p}}$ .
- ii)-  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{T_{n,p}(z)}{z^n} - \frac{\mathcal{D}_G(\infty)}{\mathcal{D}_G(z)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_k}{z \cdot \bar{z}_k - 1} \cdot \frac{|z_k|^2}{z_k} \right\|_{H^p(G, \rho)} = 0$ .
- iii)-  $T_{n,p}(z) = z^n \cdot \frac{\mathcal{D}_G(\infty)}{\mathcal{D}_G(z)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_k}{z \cdot \bar{z}_k - 1} \cdot \frac{|z_k|^2}{z_k} \cdot [1 + \epsilon_n(z)]$ ,  
 $\epsilon_n(z) \rightarrow 0$ , uniformément sur les sous ensembles compacts de  $G$ .

**Preuve.** Pour établir le point (i) du théorème 3.5.4, nous montrons les inégalités suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup m_{n,p}(\alpha) \leq (\mu(\alpha))^{\frac{1}{p}}, \quad (3.25)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf m_{n,p}(\alpha) \geq (\mu(\alpha))^{\frac{1}{p}}, \quad (3.26)$$

En effet, pour démontrer l'inégalité (3.25) nous introduisons des fonctions  $\mathcal{D}_\varepsilon$ ,  $F_{\varepsilon,\eta}$  et des polynômes  $Q_{n,\varepsilon,\eta}$  comme approximations, dans un certain sens, de  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}_\varepsilon$  et  $T_{n,p}$  respectivement, et pour cela on suit les étapes suivantes :

Étape 1 :

- $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}_\varepsilon$ .

Soit  $\mathcal{D}_\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) une fonction analytique telle que  $\mathcal{D}_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ , on suppose qu'il existe  $\varepsilon > 0$  de telle sorte que  $\min_{\Gamma} |\mathcal{D}_\varepsilon| \geq \varepsilon$ ,  $\inf_{\Gamma} |\mathcal{D}| \geq 1 + \varepsilon$  et

$$\int_{\Gamma} ||\mathcal{D}_\varepsilon(\xi)|^p - |\mathcal{D}(\xi)|^p| d\xi < \varepsilon^p, \quad (\varepsilon > 0). \quad (3.27)$$

Soit  $\eta > 0$  telle que  $\eta > \eta(\varepsilon)$  et  $\eta < 1$ ,

Étape 2 :

- $\frac{1}{\mathcal{D}_\varepsilon} \longrightarrow \mathcal{F}_{\varepsilon,\eta}$ .

On définit une fonction régulière  $\mathcal{F}_{\varepsilon,\eta}$  comme suit :

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,\eta}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{|\mathcal{D}_\varepsilon(\xi)|} & \text{si } \xi \notin \tilde{\Gamma}_+ \cup \tilde{\Gamma}_- \\ |\xi \pm 1|^2 & \text{si } \xi \in \Gamma_{\pm} \end{cases}$$

et

$$\eta \leq \mathcal{F}_{\varepsilon,\eta}(\xi) \leq \frac{1}{|\mathcal{D}_\varepsilon(\xi)|}, \quad \text{pour } \xi \in \tilde{\Gamma}_{\pm} \setminus \Gamma_{\pm}$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_{\pm} &= \{\xi \in \Gamma, \quad |\xi \pm 1|^2 \leq \frac{\eta}{2}\}, \\ \Gamma_{\pm} \subsetneq \tilde{\Gamma}_{\pm} &= \{\xi \in \Gamma, \quad |\xi \pm 1|^2 \leq \eta\}. \end{aligned}$$

Il est évident que la fonction  $\mathcal{F}_{\varepsilon,\eta}(\xi)$  est différentiable et

$$|\mathcal{D}_\varepsilon(\xi) \mathcal{F}_{\varepsilon,\eta}(\xi)| \leq 1. \quad (3.28)$$

Ainsi

$$0 \leq \log \frac{1}{\mathcal{D}_\varepsilon(0)} - \log \mathcal{F}_{\varepsilon,\eta}(0) \leq \int_{\tilde{\Gamma}_+ \cup \tilde{\Gamma}_-} \log \frac{1}{\mathcal{F}_{\varepsilon,\eta}(\xi) \mathcal{D}_\varepsilon(\xi)} |d\xi|$$

### 3.5 Problèmes extrémaux dans l'espace $H^p(G, \rho)$

---

$$0 \leq \int_{\tilde{\Gamma}_+} \log \frac{1}{|\zeta - 1|} |d\xi| + \int_{\tilde{\Gamma}_-} \log \frac{1}{|\xi + 1|} |d\xi| = o(1), \quad \eta \rightarrow 0.$$

Alors

$$\mathcal{F}_{\varepsilon, \eta}(\xi) \mathcal{D}(\xi) \simeq 1, \quad \eta \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.29)$$

sauf aux voisinages des points  $\pm 1$ .

Étape 3 :

- Estimation de  $\|\mathcal{D}Q_{n, \varepsilon, \eta}\|_{L^p(\beta, \Gamma)}$ .

Tout d'abord, nous voyons que la Fonction  $B\mathcal{F}_{\varepsilon, \eta}$  est régulière et que  $(B\mathcal{F}_{\varepsilon, \eta})' \in L^\infty(\beta, \Gamma)$ , implique la convergence uniforme de la série de Fourier dans  $\Gamma$ , également

$$\max_{\Gamma} |B(\xi) \mathcal{F}_{\varepsilon, \eta}(\xi)| \leq \eta(\varepsilon) < \eta < 1. \quad (3.30)$$

On note  $Q_{n, \varepsilon, \eta}(\xi)$  la somme de Fourier d'ordre  $n$  de la fonction  $B\mathcal{F}_{\varepsilon, \eta}$ , donc

$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists n_0(\varepsilon, \eta) :$

$$\sup_{n \geq n_0(\varepsilon, \eta)} |Q_{n, \varepsilon, \eta}(\xi)| \leq |\mathcal{F}_{\varepsilon, \eta}(\xi) - Q_{n, \varepsilon, \eta}(\xi)| + |\mathcal{F}_{\varepsilon, \eta}(\xi)| \leq 2, \quad (3.31)$$

et pour tout  $\varepsilon > 0, \eta > 0$  fixé, on a

$$\|B\mathcal{F}_{\varepsilon, \eta} - Q_{n, \varepsilon, \eta}\|_{L^\infty(\beta, \Gamma)} \longrightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.32)$$

En utilisant les formules (3.29) et (3.32) on obtient

$$\|\mathcal{D}_\varepsilon Q_{n, \varepsilon, \eta}\|_{L^p(\beta, \Gamma)} \leq \|\mathcal{D}_\varepsilon B\mathcal{F}_{\varepsilon, \eta}\|_{L^p(\beta, \Gamma)} + \|\mathcal{D}_\varepsilon (B\mathcal{F}_{\varepsilon, \eta} - Q_{n, \varepsilon, \eta})\|_{L^p(\beta, \Gamma)}$$

$$\leq \|\mathcal{D}_\varepsilon B\mathcal{F}_{\varepsilon, \eta}\|_{L^p(\beta, \Gamma)} + \|\mathcal{D}_\varepsilon\|_{L^p(\beta, \Gamma)} \|B\mathcal{F}_{\varepsilon, \eta} - Q_{n, \varepsilon, \eta}\|_{L^\infty(\beta, \Gamma)}$$

$$\leq 1 + \varepsilon, \quad \forall n \geq s(\varepsilon, \eta). \quad (3.33)$$

Par conséquent, en utilisant les formules (3.25), (3.31) et (3.33) :

$$\|\mathcal{D}Q_{n, \varepsilon, \eta}\|_{L^p(\beta, \Gamma)}^p \leq \int_{\Gamma} (|\mathcal{D}|^p - |\mathcal{D}_\varepsilon|^p + |\mathcal{D}_\varepsilon|^p) |Q_{n, \varepsilon, \eta}(\xi)|^p |d\xi|$$

$$\begin{aligned} &\leq (1 + \varepsilon)^p + \int_{\Gamma} (|\mathcal{D}|^p - |\mathcal{D}_{\varepsilon}|^p) |Q_{n,\varepsilon,\eta}(\xi)|^p d\xi \\ &\leq 1 + p\varepsilon + 2^p \varepsilon^p, \quad \forall n \geq \max(m, s), \end{aligned} \quad (3.34)$$

pour  $n \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Étape 4 :

- Estimation de  $\|Q_{n,\varepsilon,\eta}\|_{L^p(\gamma)}$  et  $m_{n,p}(\alpha)$ .

Comme le produit de Blaschke est égal à zéro dans les points  $z_k$ , nous avons pour  $\varepsilon$  et  $\eta$  fixé alors,

$$\|Q_{n,\varepsilon,\eta}\|_{L^p(\gamma)} = \|B\mathcal{F}_{\varepsilon,\eta} - Q_{n,\varepsilon,\eta}\|_{L^p(\gamma)} \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.35)$$

En effet, si nous remarquons que

$$Q_{n,\varepsilon,\eta}(z) = B\mathcal{F}_{\varepsilon,\eta}(0)z^n + \dots,$$

ainsi

$$m_{n,p}(\alpha) = \|T_{n,p}\|_{L^p(\alpha,F)} = \inf \|Q_n\|_{L^p(\alpha,F)},$$

nous obtenons, avec l'aide de (3.34) et (3.35)

$$\begin{aligned} m_{n,p}(\alpha) &\leq \left\| \frac{1}{(B\mathcal{F}_{\varepsilon,\eta})(0)} Q_{n,\varepsilon,\eta} \right\|_{L^p(\alpha,F)} = \frac{1}{(B\mathcal{F}_{\varepsilon,\eta})(0)} \|Q_{n,\varepsilon,\eta}\|_{L^p(\alpha,F)} \\ &\leq \frac{1 + p\varepsilon + 2^p \varepsilon^p}{(B\mathcal{F}_{\varepsilon,\eta})(0)}. \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant (3.16) avec  $\mu(\beta) = \mathcal{D}^p(0) = \mathcal{D}_G^p(\infty)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup m_{n,p}(\alpha) &\leq \mathcal{D}_G(\infty) \prod_{k=1}^{\infty} |z_k| = (\mu(\beta))^{\frac{1}{p}} \prod_{k=1}^{\infty} |z_k| \\ &= (\mu(\alpha))^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

**Remarque 3.5.5.** *La formule*

$$\|Q_{n,\varepsilon,\eta}\|_{L^p(\alpha,F)} \leq 1 + p\varepsilon + 2^p \varepsilon^p \quad n \rightarrow \infty,$$

### 3.5 Problèmes extrémaux dans l'espace $H^p(G, \rho)$

---

implique que :

$$\frac{m_{n,p}(\alpha)}{m_{n,p}(\beta)} \leq \prod_{k=1}^{\infty} |z_k|; \quad n > N_0, \quad p > 0. \quad (3.37)$$

Il reste à prouver que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} m_{n,p}(\alpha) \geq (\mu(\alpha))^{\frac{1}{p}}.$$

Nous proposons deux preuves de cette dernière formule.

La première preuve du (3.26) :

Posons

$$\Phi_{n,p}^*(z) = \frac{T_{n,p}(z)}{z^n}, \quad (3.38)$$

et utilisons (3.25), on obtient :

$$\|\Phi_{n,p}^*\|_{H^p(G,\rho)}^p \leq M, \quad (3.39)$$

Soit  $M^* = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_{n,p}^*\|_{H^p(G,\rho)}^p$ , on a

$$M^* = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in N_1} \|\Phi_{n,p}^*\|_{H^p(G,\rho)}^p. \quad (3.40)$$

Ce résultat et le lemme 3.3.3 impliquent que  $\{\Phi_{n,p}^*, n \in N_1\}$  est une famille normale dans  $G$ . Ainsi on peut trouver une fonction  $\psi(z)$  qui est la limite uniforme sur les sous ensembles compacts de  $G$  d'une sous suite  $\{\Phi_{n,p}^*, n \in N_2\}$  de  $\{\Phi_{n,p}^*, n \in N_1\}$ .

D'après le lemme 3.3.4 :  $\psi \in H^p(G, \rho)$  et

$$\|\psi\|_{H^p(G,\rho)}^p \leq \lim_{n \rightarrow \infty, n \in N_1} \|\Phi_{n,p}^*\|_{H^p(G,\rho)}^p. \quad (3.41)$$

D'autre part,  $\psi(\infty) = 1$  et  $\psi(z_k) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Avec (3.41) on obtient

$$\mu(\alpha) \leq \|\psi\|_{H^p(G,\rho)}^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_{n,p}^*\|_{H^p(G,\rho)}^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (m_{n,p}(\alpha))^p.$$

Autre preuve du (3.26) :

Utilisant les propriétés extrémales de  $T_{n,p}(z)$  et  $T_{n,p}^l(z)$ , on obtient

$$m_{n,p}(\alpha) \geq m_{n,p}(\alpha_l), \quad \forall p > 0, \forall l. \quad (3.42)$$

où

$$m_{n,p}(\alpha_l) = \|T_{n,p}^l\|_{L^p(\alpha_l, F_l)} = \inf_{Q_n \in \mathbb{P}_{n,1}} \{\|Q_n\|_{L^p(\alpha_l, F_l)}\}, \quad (3.43)$$

avec

$$\|f\|_{L^p(\alpha_l, F_l)}^p = \int_{\Gamma} |f(\xi)|^p \rho(\xi) |d\xi| + \sum_{k=1}^l A_k |f(z_k)|^p.$$

En combinant (3.42) avec [24, théorème 2.2 ], on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf m_{n,p}(\alpha) \geq (\mu(\alpha_l))^{\frac{1}{p}}, \quad \forall p > 0, \forall l. \quad (3.44)$$

où

$$\mu(\alpha_l) = \inf \{\|\varphi\|_{H^p(G, \rho)}^p, \varphi \in H^p(G, \rho), \varphi(\infty) = 1, \text{ et } \varphi(z_k) = 0, k = 0, \dots, l\}, \quad (3.45)$$

et  $F_l = \Gamma \cup \{z_k\}_{k=1}^l$ .

Maintenant, utilisant le fait que

$$\mu(\alpha_l) = \mu(\beta) \left( \prod_{k=1}^l |z_k| \right)^p,$$

(voir [24, formule (1.9) ]), et faisant tendre  $l \rightarrow \infty$ ,

on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf m_{n,p}(\alpha) \geq (\mu(\beta))^{\frac{1}{p}} \prod_{k=1}^{\infty} |z_k| = (\mu(\alpha))^{\frac{1}{p}} \quad (3.46)$$

Alors (3.36) et (3.46) impliquent

$$(\mu(\alpha))^{\frac{1}{p}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf m_{n,p}(\alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup m_{n,p}(\alpha) \leq (\mu(\alpha))^{\frac{1}{p}}, \quad (3.47)$$

et la preuve du point (i) du théorème est achevée.

Considérons les fonctions  $\Psi_n(z)$  suivantes

$$\Psi_n(z) = \frac{1}{2}(\Phi_{n,p}^*(z) + \psi^*(z)),$$

### 3.5 Problèmes extrémaux dans l'espace $H^p(G, \rho)$

---

avec

$$\|\psi^*\|_{H^p(G, \rho)}^p = \mu(\alpha).$$

Alors  $\Psi_n(z)$  vérifient :

$$\Psi_n(\infty) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(z_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Comme dans (i) nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|\Psi_n\|_{H^p(G, \rho)}^p \geq \mu(\alpha).$$

Finalement on obtient (ii) du théorème 3.5.4 en appliquant les inégalités de Clarkson et une extension du lemme de Keldych (voir chapitre 4 pour plus de détaille ).

Il est claire que les formules du type (iii) combinées avec le lemme 3.3.4 aboutissent à la formule asymptotique des polynômes  $L^p$  extrémaux donc au (iii). En effet, appliquons le lemme 3.3.4 aux fonctions

$$\epsilon_n(z) = \frac{T_{n,p}}{z^n} - \psi^*(z). \quad (3.48)$$

On obtient pour tout compact  $K \subset G$  :

$$\sup_{z \in K} |\epsilon_n(z)| \leq C(K) \|\epsilon_n\|_{H^p(G, \rho)}^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

et le (iii) du théorème 3.5.4 est démontré.  $\square$





## Chapitre 4

# Comportement asymptotique des polynômes $L^p$ extrémaux en présence d'un ensemble de points de masse dénombrable

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous représentons la formule asymptotique des polynômes  $P_{n,p,\alpha}$   $L^p$  extrémaux à l'extérieur du cercle unité  $\Gamma$  associée à une mesure sous la forme  $\alpha = \beta + \gamma = \beta_a + \beta_s + \gamma$ , où  $\beta_a$  la partie absolument continue de  $\beta$  vérifie la condition de Szegö avec  $\text{supp}(\beta_a) = \Gamma$ ,  $\beta_s$  la partie singulière de  $\beta$  avec  $\text{supp}(\beta_s) \subset \Gamma$  et  $\gamma$  une mesure discrète concentrée sur un nombre infini des points  $\{z_k\}_{k=1}^\infty$  situés à l'extérieur du cercle unité. On note par  $m_n(p, \alpha)$ ,  $\mu(\alpha)$  les valeurs optimales

Le théorème 3.5.4 est un cas particulier de ce problème. Il correspond au cas  $\beta_s = 0$ .

Les résultat que nous obtenons sont basés essentiellement sur les travaux de Peherstofer, Yuditskii [39], Gueronimus [19] et Bello Hernandez, Marcellans et Minguez [8, 34]. Les difficultés que nous trouvons sont d'établir les inégalités :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup m_{n,p}(\alpha) \leq \mu(\alpha)^{\frac{1}{p}}, \quad (4.1)$$

et

$$\mu(\alpha)^{\frac{1}{p}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf m_{n,p}(\alpha). \quad (4.2)$$

On peut cependant utiliser cette nouvelle technique du à Peherstofer et Yuditskii [39] avec quelques modifications, qu'ils ont utilisée pour démontrer la formule asymptotique des polynômes orthogonaux associés à une mesure concentrée sur le segment  $[-2, +2]$  plus un nombre infini de points. Les auteurs ont démontré une formule semblable à la formule (4.1), alors que cette technique resterait valable pour établir la formule (4.1) dans le cas  $L^p$  extrémaux. Nous utilisons aussi les propriétés extrémales des polynômes et le travail de Gueronimus [19] pour démontrer la formule (4.2). Il faut bien voir comment la constante extrémale intervient dans l'espace  $H^p(G, \rho)$  et son rôle dans le recherche de la formule asymptotique.

Dans le cas  $p = 2$ , on applique dans ce cas la règle du parallélogramme. Par contre, si  $p \neq 2$  on applique l'inégalité de Clarkson pour  $1 \leq p < \infty$  et pour  $0 < p < 1$

## 4.2 Rappels des mesures et problèmes extrémaux

---

en utilisant soit le lemme de Kyldysh [26] dans le cas du contour tout seul ( voir Geronimus [19] ), soit une première extension du lemme de Kyldysh dans le cas d'un contour plus un nombre fini de points dû à Kaliaguine [24, lemme 2.1, p 235], soit une récente extension du lemme de Keldysh dû à Bello Hernaudez, Marcellan et Minguez [8, théorème 2, p 430] dans le cas d'un cercle plus un nombre infini de points.

## 4.2 Rappels des mesures et problèmes extrémaux

### 4.2.1 Mesure complexe

**Définition 4.2.1.** Soit  $(X, \mathfrak{S})$  un espace mesurable. On appelle mesure complexe toute application  $\mu : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathbb{C}$  telle que :

$$\mu(\cup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n),$$

pour toute suite d'éléments  $A_n \in \mathfrak{S}$  deux à deux disjoints.

**Définition 4.2.2.** Si  $\mu$  est une mesure complexe sur  $(X, \mathfrak{S})$ , on appelle variation de  $\mu$  l'application  $|\mu| : \mathfrak{S} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  définie, pour  $A \in \mathfrak{S}$  par

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \sum_{n \geq 1} |\mu|(A_n); \quad (A_n)_{n \geq 1} \text{ partition mesurable de } A \right\},$$

$|\mu|(X)$  s'appelle la variation totale de  $\mu$ . On a

**Théorème 4.2.3.**  $|\mu|$  est une mesure positive bornée sur  $(X, \mathfrak{S})$ .

### Mesure absolument continue

Soit  $m$  une mesure positive sur  $(X, \mathfrak{S})$  et  $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  une application  $m$ -intégrable. La mesure de densité  $f$  par rapport à  $m$  :  $m_f(A) = \int_A f dm$ ,  $A \in \mathfrak{S}$  vérifie  $m(A) = 0 \Rightarrow m_f(A) = 0$ .

**Définition 4.2.4.** Soit  $m$  une mesure positive sur  $(X, \mathfrak{S})$  et  $\mu$  une autre mesure complexe sur  $(X, \mathfrak{S})$ . On dit que  $\mu$  est absolument continue par rapport à  $m$  si :  $m(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$ .

## 4.2.2 Mesure singulière

**Définition 4.2.5.** On dit qu'une mesure  $\mu$  est portée par  $A \in \mathfrak{S}$  si

$$\mu(B) = \mu(A \cap B), \forall B \in \mathfrak{S}.$$

Cela équivaut à  $B \cap A = \emptyset \Rightarrow \mu(B) = 0$

**Définition 4.2.6.** On dit que les mesures  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont singulières l'une par rapport à l'autre, et l'on écrit  $\mu_1 \perp \mu_2$ , s'il existe des parties mesurables disjointes  $A, B \in \mathfrak{S}$  telles que  $\mu_1$  soit portée par  $A$  et  $\mu_2$  portée par  $B$ .

## 4.2.3 Théorème de Radon-Nikodym

**Théorème 4.2.7.** Soit  $m$  une mesure positive  $\sigma$ -finie sur  $(X, \mathfrak{S})$  et  $\mu$  une mesure sur  $(X, \mathfrak{S})$  positive  $\sigma$ -finie. Alors :

**1) Décomposition de Lebesgue :** il existe un unique couple de mesures  $\mu_a, \mu_s$  sur  $(X, \mathfrak{S})$  telles que

$$\mu = \mu_a + \mu_s \text{ et } \mu_s \perp m$$

et  $\mu_a$  est absolument continue par rapport à  $m$ .

Ces mesures sont positives et  $\sigma$ -finies, et l'on a  $\mu_a \perp \mu_s$ .

**2) Théorème de Radon-Nikodym :** il existe une unique fonction  $f$   $m$ -intégrable telle que

$$\mu_a = m_f = f.m$$

On dit que  $f$  est la dérivée de Radon-Nikodym de  $\mu$  par rapport à  $m$ .

## 4.2 Rappels des mesures et problèmes extrémaux

---

### 4.2.4 Problèmes extrémaux associés à la mesure $\alpha$

Soit  $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  et  $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$  l'extérieur du cercle unité, on considère une mesure  $\alpha$  de la forme

$$\alpha = \beta + \gamma = \beta_a + \beta_s + \gamma,$$

où  $\beta_a$  la partie absolument de  $\beta$  avec  $\text{supp}(\beta_a) = \Gamma$ ; c'est-à-dire

$$d\beta_a(\xi) = \rho(\xi), \quad \rho(\xi) \geq 0, \quad \rho(\xi) \in L^1([-\pi, \pi], |d\xi|),$$

$\beta_s$  la partie singulière de  $\beta$  avec  $\text{supp}(\beta_s) \subset \Gamma$  et  $\gamma$  une mesure discrète concentrée sur un nombre infini des points  $z_k \in G$  telle que

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \delta_{z_k}, \quad A_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k < \infty,$$

où  $\delta_{z_k}$  la mesure de Dirac au point  $z_k$ .

Supposons que la partie absolument continue  $\beta_a$  vérifie

$$\int_{\Gamma} \log(\rho(\xi)) |d\xi| > -\infty \quad (\text{condition de Szegő}). \quad (4.3)$$

On note par  $m_{n,p}(\alpha)$  et  $m_{n,p}(\beta_a)$  les valeurs optimales

$$m_{n,p}(\alpha) = \|P_{n,p,\alpha}\|_{L^p(\alpha)} = \min_{Q_n = z^n + \dots} \{\|Q_n\|_{L^p(\alpha)}\}, \quad (4.4)$$

$$m_{n,p}(\beta_a) = \|P_{n,p,\beta_a}\|_{L^p(\Gamma)} = \min_{Q_n = z^n + \dots} \{\|Q_n\|_{L^p(\Gamma)}\}, \quad (4.5)$$

avec

$$\|f\|_{L^p(\alpha)}^p = \int_{\Gamma} |f(\xi)|^p \rho(\xi) |d\xi| + \int_{\Gamma} |f(\xi)|^p d\beta_s + \sum_{k=1}^{\infty} A_k |f(z_k)|^p,$$

et

$$\|f\|_{L^p(\Gamma)}^p = \int_{\Gamma} |f(\xi)|^p \rho(\xi) |d\xi|.$$

## Chapitre 4. Comportement asymptotique des polynômes $L^p$ extrémaux en présence d'un ensemble de points de masse dénombrable

---

On se donne la solution optimale d'un problème extrémal

$$\inf\{\|\varphi\|_{H^p(G,\rho)}^p : \varphi \in H^p(G,\rho), \varphi(\infty) = 1\},$$

par

$$\varphi^*(z) = \frac{\mathcal{D}_G(\infty)}{\mathcal{D}_G(z)},$$

et la valeur optimal

$$\mu(\beta_a) = \|\varphi^*\|_{H^p(G,\rho)}^p = \mathcal{D}_G(\infty)^p = \mathcal{D}(0)^p \quad (\text{voir chapitre 3}). \quad (4.6)$$

Ainsi pour le problème extrémal

$$\mu(\alpha) = \inf\{\|\varphi\|_{H^p(G,\rho)}^p : \varphi \in H^p(G,\rho), \varphi(\infty) = 1, \varphi(z_k) = 0, k = 1, 2, \dots\}, \quad (4.7)$$

la solution optimal donnée par

$$\psi^*(z) = \frac{\mathcal{D}_G(\infty)}{\mathcal{D}_G(z)} \tilde{B}(z),$$

où  $\tilde{B}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_k}{z \bar{z}_k - 1} \frac{|z_k|^2}{z_k}$  le produit de Blaschke et  $\mathcal{D}_G(z)$  la fonction de Szegö associée au domaine  $G$  telle que

$$\mathcal{D}_G \in H^p(G,\rho), \quad |\mathcal{D}_G(\xi)|^p = \rho(\xi) \quad (\xi \in [-\pi, \pi]), \quad \mathcal{D}_G(\infty) > 0.$$

Donc on peut vérifier que les valeurs optimales sont liées par

$$\mu(\beta_a) = \prod_{k=1}^{\infty} |z_k|^{-p} \mu(\alpha). \quad (4.8)$$

### 4.3 Extension du lemme de Keldysh

Pour son utilité dans la démonstration des formules asymptotiques des polynômes  $L^p$  extrémaux  $P_{n,p,\alpha}$ , dans le cas  $0 < p < 1$ , nous explicitons dans cette section le lemme de Keldysh classique [26]. Puis une généralisation du lemme de

### 4.3 Extension du lemme de Keldysh

---

Keldysh au cas du cercle plus un nombre fini de points se trouvant à l'intérieur du cercle donné par Kaliaguine [24]. Et enfin, une extension du lemme de Keldysh au cas du cercle plus un nombre infini de points se trouvant à l'intérieur du cercle introduit par Bello Hernandez, Marcellan et Minguez [8].

#### 4.3.1 Lemme de Keldysh

**Lemme 4.3.1.** [26] *Soit  $\{f_n\}$  une suite de fonctions analytiques dans  $\Delta$  et  $0 < p < \infty$ . Si*

- $\{f_n\} \subset H^p(\Delta)$ ,
- $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f_n(z) = f_n(e^{i\theta})$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 1$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(e^{i\theta})|^p d\theta \right\} = 1$ ,

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(e^{i\theta}) - 1|^p d\theta \right\} = 0.$$

#### 4.3.2 Généralisation du lemme de Keldysh au cas d'un nombre fini de points

**Lemme 4.3.2.** *Soit  $\{f_n\}$  une suite de fonctions analytiques dans  $\Delta$  et  $\{z_k\}_{k=1}^N$  un ensemble fini de points se trouvant dans  $\Delta$ . On suppose que  $\log(\beta') \in L^1([0, 2\pi], dm)$  et  $0 < p < \infty$ , si*

- $\{f_n\} \subset H^p(\Delta)$ ,
- $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} f_n(z) = f_n(e^{i\theta})$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_k) = 0, k = 1, \dots, N$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(e^{i\theta})|^p d\theta \right\} = \prod_{k=1}^N |z_k|^{-p}$ ,

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(e^{i\theta}) - \tilde{B}(e^{i\theta})|^p d\theta \right\} = 0.$$



## Chapitre 4. Comportement asymptotique des polynômes $L^p$ extrémaux en présence d'un ensemble de points de masse dénombrable

---

**Preuve.** On considère pour les fonctions

$$h_n(z) = \frac{f_n(z)}{\tilde{B}(z)},$$

la décomposition

$$h_n(z) = g_n(z) + \sum_{k=1}^N r_k \frac{f_n(z_k)}{z - z_k},$$

où  $r_k$  ne dépend pas de  $n$ . Puis on applique le lemme de Keldysh à la suite de fonctions  $\{g_n\}$  analytiques dans  $\Delta$ .  $\square$

### 4.3.3 Extension du lemme de Keldysh au cas d'un nombre infini de points

Avant de donner l'extension du lemme de Keldysh, introduisons d'abord quelques notation :

Dans ce cas les auteurs [8] ont considéré une mesure  $\beta$  non absolument continue concentrée sur le cercle unité, la mesure  $\beta$  admet donc la décomposition suivante :

$$\beta = \beta_a + \beta_s,$$

où

$\beta_a$  est la partie absolument continue de  $\beta$  concentrée sur  $\Gamma_a$ .

$\beta_s$  est la partie singulière de  $\beta$  concentrée sur  $\Gamma_s$ .

$\Gamma_a$  et  $\Gamma_s$  est la décomposition disjointe du cercle unité.

On suppose que

$$\beta \in S \Leftrightarrow \log(\beta') \in L^1([0, 2\pi], dm),$$

où  $m$  est la mesure de Lebesgue sur  $[0, 2\pi]$  et  $d\beta = \beta' dm$  ( $\beta'$  est la dérivée de Radon Nicodym de  $\beta$ ).

$H^p(\beta)$  est définie comme la fermeture de  $L^p(\beta)$  des polynômes en  $e^{i\theta}$  et

$$\|f\|_p^p = \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\beta(\theta), \quad f \in H^p(\beta).$$

### 4.3 Extension du lemme de Keldysh

---

On note par

$$H_a^p(\beta) = \overline{L_a^p} = \overline{\{f \in L^p(\beta); f = 0 \text{ sur } \beta_s - pp\}},$$

$$H_s^p(\beta) = \overline{L_s^p} = \overline{\{f \in L^p(\beta); f = 0 \text{ sur } \beta_a - pp\}}.$$

On considère la fonction

$$K_p(\beta, z) = \begin{cases} \frac{\mathcal{D}(\beta, 0)}{\mathcal{D}(\beta, z)} & \text{si } z \in \Gamma_a \cup \{z : |z| < 1\} \\ 0 & \text{si } z \in \Gamma_s \end{cases}$$

où

$$\mathcal{D}(\beta, z) = \exp\left\{\frac{1}{2p} \int \frac{\xi + z}{\xi - z} \log \beta' dm\right\}; \quad \xi = e^{i\theta}$$

est la fonction de Szegö.

On a alors la caractérisation suivante de l'espace  $H^p(\beta)$

$$H^p(\beta) = K_p H^p(m) \oplus L_s^p,$$

en d'autre terme, cela veut dire

$$\forall f \in H^p(\beta), \exists \Psi \in H^p(m) \text{ et } \exists f_s \in L_s^p \text{ telles que } f = K_p \Psi + f_s.$$

L'extension du lemme de Keldysh est alors donnée par le lemme suivant :

**Lemme 4.3.3.** *Soit  $0 < p < \infty$ ,  $f_n \in H^p(\beta)$  une suite de fonctions et  $\{z_k\}_{k=1}^\Lambda$  un ensemble fini ou infini de points se trouvant dans  $\Delta$ . Pour  $0 < p < \infty$  et  $\beta \in S$ , si*

$$a) - \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(0) = 1,$$

$$b) - \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(z_k) = 0,$$

$$c) - \sum_{k=1}^\Lambda (|z_k| - 1) < \infty,$$

$$d) - \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = \prod_{k=1}^\Lambda |z_k|^{-p} \mathcal{D}(\beta, 0),$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n = \prod_{k=1}^\Lambda \frac{z - z_k}{z \bar{z}_k - 1} \frac{z_k}{|z_k|^2}, \quad (4.9)$$

## Chapitre 4. Comportement asymptotique des polynômes $L^p$ extrémaux en présence d'un ensemble de points de masse dénombrable

---

uniformément sur les sous ensembles compacts de  $\Delta$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - K_p \prod_{k=1}^{\Lambda} \frac{z - z_k}{z\bar{z}_k - 1} \frac{z_k}{|z_k|^2}\|_p = 0. \quad (4.10)$$

**Preuve.**

Soit  $f_n \in H^p(\beta)$  alors  $f_n = K_p \Psi_n + f_s$  où  $\Psi_n \in H^p(m)$  et  $f_s \in L_s^p$ , donc

$$\|K_p \Psi_n\|_p \leq \|f_n\|_p.$$

D'après (d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|\Psi_n\|_p \leq \prod_{k=1}^{\Lambda} |z_k|^{-p},$$

on peut alors extraire de la suite  $\{\Psi_n\}$  une sous suite convergente vers la même limite  $\Psi$ .

D'après (b)

$$\Psi(z_k) = 0, \quad \Psi \in H^p(m) \quad \text{et} \quad \|\Psi\|_p \leq \prod_{k=1}^{\Lambda} |z_k|^{-p},$$

et qui admet la décomposition

$$\Psi(z) = \prod_{k=1}^{\Lambda} \frac{z - z_k}{z\bar{z}_k - 1} \frac{z_k}{|z_k|^2} \prod_{k=1}^{\Lambda} \frac{z - w_k}{z\bar{w}_k - 1} \frac{w_k}{|w_k|^2} h(z),$$

où  $\{z_k\}$  et  $\{w_k\}$  sont les zéros de  $\Psi$  et  $h \in H^p(m)$  telle que  $h(0) = 1$  et

$$\|\Psi\|_p = \prod_{k=1}^{\Lambda} \frac{|z_k|^{-p}}{|w_k|^p} \|h\|_p.$$

or  $\|h\|_p \leq 1$ , ce qui implique que  $h \equiv 0$  donc  $\{w_k\}$  est vide, on a alors

$$\Psi(z) = \prod_{k=1}^{\Lambda} \frac{z - z_k}{z\bar{z}_k - 1} \frac{z_k}{|z_k|^2}.$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(z) = \Psi(z)$ , converge uniformément sur les sous ensembles compacts de  $\Delta$ , et  $\|\Psi_n\|_p \leq \|\Psi\|_p$ , on obtient alors que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Psi_n - \Psi\|_p = 0$ , c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_p \Psi_n - K_p \Psi\|_{p, \beta_a} = 0.$$

#### 4.4 Classe de mesures $\mathfrak{G}$

---

En particulier

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_p \Psi_n\|_{p, \beta_a} = \|K_p \Psi\|_{p, \beta_a} = \mathcal{D}(\beta, 0) \prod_{k=1}^{\Lambda} |z_k|^{-p},$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{p, \beta_s} = 0,$$

ce qui donne (4.10).  $\square$

#### 4.4 Classe de mesures $\mathfrak{G}$

Définissons maintenant la classe de mesures  $\mathfrak{G}$ , pour laquelle on obtient la formule asymptotique des polynômes  $L^p$  extrémaux  $P_{n,p,\alpha}$ .

**Définition 4.4.1.** Soit  $\alpha = \beta + \gamma = \beta_a + \beta_s + \gamma$ , on dit que la mesure  $\alpha$  appartient à la classe  $\mathfrak{G}$  si la partie absolument continue et la partie discrète de  $\alpha$ , satisfait

$$\int_{\Gamma} (\log \rho(\xi)) |d\xi| > -\infty$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|z_k| - 1) < \infty.$$

**Lemme 4.4.2.** Pour  $p > 0$  et  $\alpha \in \mathfrak{G}$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup m_{n,p}(\alpha) \leq \mu(\alpha)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.11)$$

**Preuve.**

Tout d'abord; on considère  $\mathcal{D}_\varepsilon$  une fonction analytique de classe  $\mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ , on suppose qu'il existe  $\varepsilon > 0$  de telle sorte que  $\min_{\Gamma} |\mathcal{D}_\varepsilon| \geq \varepsilon$  et  $\inf_{\Gamma} |\mathcal{D}| \geq 1 + \varepsilon$ , en plus on a :

$$\int_{\Gamma} ||\mathcal{D}_\varepsilon(\xi)|^p - |\mathcal{D}(\xi)|^p| |d\xi| < \varepsilon^p, \quad (\varepsilon > 0). \quad (4.12)$$

## Chapitre 4. Comportement asymptotique des polynômes $L^p$ extrémaux en présence d'un ensemble de points de masse dénombrable

---

Par la suite on pose

$$\frac{1}{\eta(\varepsilon)} = \max |\mathcal{D}_\varepsilon(\xi)| \quad \text{sur } \Gamma. \quad (4.13)$$

Soit  $\eta > 0$  telle que  $\eta > \eta(\varepsilon)$  et  $\eta < 1$ , on définit une fonction régulière  $\chi_{\varepsilon,\eta}$  comme suit :

$$\chi_{\varepsilon,\eta}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{|\mathcal{D}_\varepsilon(\xi)|} & \text{si } \xi \in \Gamma \setminus (\tilde{\Gamma}_s \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-) \\ \eta & \text{si } \xi \in \Gamma_s \setminus (\Gamma_+ \cup \Gamma_-) \\ |\xi \pm 1|^2 & \text{si } \xi \in \Gamma_\pm \end{cases}$$

et pour  $\xi \in \tilde{\Gamma}_s \setminus (\Gamma_s \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-)$

$$\eta \leq \chi_{\varepsilon,\eta}(\xi) \leq \frac{1}{|\mathcal{D}_\varepsilon(\xi)|},$$

où

$$\Gamma_\pm = \{\xi \in \Gamma, \quad |\xi \pm 1|^2 \leq \eta\},$$

$\Gamma_s \subset \Gamma$  un système d'intervalles fini tel que

$$\int_{\Gamma \setminus \Gamma_s} d\beta_s \leq \eta, \quad (4.14)$$

et

$$|\Gamma_s| = \int_{\Gamma_s} |d\xi| \leq \eta, \quad (4.15)$$

et  $\tilde{\Gamma}_s$  un autre système d'intervalles qui se pose par extension à chaque intervalle de  $\Gamma_s$  tel que  $|\tilde{\Gamma}_s| \leq 2\eta$ .

Il est clair que la fonction  $\chi_{\varepsilon,\eta}(\xi)$  est différentiable et

$$|\mathcal{D}_\varepsilon(\xi)\chi_{\varepsilon,\eta}(\xi)| \leq 1, \quad (4.16)$$

aussi

$$|\mathcal{D}_\varepsilon(\xi)| \leq \frac{1}{\eta}. \quad (4.17)$$

#### 4.4 Classe de mesures $\mathfrak{G}$

---

Ainsi,

$$0 \leq \log \frac{1}{\chi_{\varepsilon, \eta}(0)} - \log \mathcal{D}_{\varepsilon}(0) \leq \int_{\tilde{\Gamma}_+ \cup \tilde{\Gamma}_- \cup \Gamma_s} \log \frac{1}{\chi_{\varepsilon, \eta}(\xi) \mathcal{D}_{\varepsilon}(\xi)} |d\xi|$$

$$0 \leq \int_{\tilde{\Gamma}_+} \log \frac{1}{|\zeta - 1|} |d\xi| + \int_{\tilde{\Gamma}_-} \log \frac{1}{|\xi + 1|} |d\xi| + \log \frac{1}{\eta} \int_{\tilde{\Gamma}_s} |d\xi| = o(1), \quad \eta \rightarrow 0,$$

implique

$$\chi_{\varepsilon, \eta}(0) \mathcal{D}(0) \simeq 1, \quad \eta \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.18)$$

sauf aux voisinages des points  $\pm 1$ .

D'autre part, nous voyons que la fonction  $B_{\chi_{\varepsilon, \eta}}$  est régulière, où  $B(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{t_k - t}{1 - t\bar{t}_k} \frac{|t_k|}{t_k}$  ( $t \in D$ ,  $|t_k| < 1$ ), et que le produit de Blaschke oscille aux voisinages des points  $\pm 1$ , par ailleurs,

$$\sup_{\xi \in \Gamma} |(\sqrt{B'(\xi)}(\xi^2 - 1))^2| < \infty.$$

Par conséquent,  $(B_{\chi_{\varepsilon, \eta}})' \in L^{\infty}(\Gamma)$  (voir [38]), la série de Fourier de la fonction  $B_{\chi_{\varepsilon, \eta}}$  converge uniformément sur  $\Gamma$ , d'où

$$\max_{\Gamma} |(B_{\chi_{\varepsilon, \eta}})(\xi)| \leq \max_{\Gamma} \left| \frac{1}{\mathcal{D}_{\varepsilon}(\xi)} \right| \leq 1. \quad (4.19)$$

On note  $Q_{n, \varepsilon, \eta}$  la somme de Fourier d'ordre  $n$  de la fonction  $B_{\chi_{\varepsilon, \eta}}$ , alors

$\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists m(\varepsilon, \eta) :$

$$\sup_{n \geq m(\varepsilon, \eta)} |Q_{n, \varepsilon, \eta}(\xi)| \leq |(Q_{n, \varepsilon, \eta} - \chi_{\varepsilon, \eta})(\xi)| + |\chi_{\varepsilon, \eta}(\xi)| \leq 2, \quad (4.20)$$

et pour tous  $\varepsilon, \eta$  fixés

$$\|B_{\chi_{\varepsilon, \eta}} - Q_{n, \varepsilon, \eta}\|_{L^{\infty}(\Gamma)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.21)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}_{\varepsilon} Q_{n, \varepsilon, \eta}\|_{L^p(\Gamma)} &\leq \|\mathcal{D}_{\varepsilon} B Q_{n, \varepsilon, \eta}\|_{L^p(\Gamma)} + \|\mathcal{D}_{\varepsilon} (B_{\chi_{\varepsilon, \eta}} - Q_{n, \varepsilon, \eta})\|_{L^p(\Gamma)} \\ &\leq \|\mathcal{D}_{\varepsilon} B Q_{n, \varepsilon, \eta}\|_{L^p(\Gamma)} + \|\mathcal{D}_{\varepsilon}\|_{L^p(\Gamma)} \|B_{\chi_{\varepsilon, \eta}} - Q_{n, \varepsilon, \eta}\|_{L^{\infty}(\Gamma)} \end{aligned}$$

## Chapitre 4. Comportement asymptotique des polynômes $L^p$ extrémaux en présence d'un ensemble de points de masse dénombrable

---

$$\leq 1 + \varepsilon_1, \forall n \geq s(\varepsilon_1, \eta). \quad (4.22)$$

Par conséquent, en utilisant les formules suivantes (4.12), (4.20) et (4.22) :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}Q_{n,\varepsilon,\eta}\|_{L^p(\Gamma)}^p &\leq \int_{\Gamma} (|\mathcal{D}|^p - |\mathcal{D}_{\varepsilon}|^p + |\mathcal{D}_{\varepsilon}|^p) |Q_{n,\varepsilon,\eta}(\xi)|^p |d\xi| \\ &\leq (1 + \varepsilon_1)^p + \int_{\Gamma} (|\mathcal{D}|^p - |\mathcal{D}_{\varepsilon}|^p) |Q_{n,\varepsilon,\eta}(\xi)|^p |d\xi| \\ &\leq 1 + p\varepsilon_1 + 2^p \varepsilon^p, \quad \forall n \geq \max(m, s), \end{aligned} \quad (4.23)$$

pour  $n \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Pour la mesure singulière  $\beta_s$  nous avons

$$\begin{aligned} \|Q_{n,\varepsilon,\eta}\|_{L^p(\beta_s)} &\leq \|\mathcal{D}B\chi_{\varepsilon,\eta}\|_{L^p(\beta_s)} \\ &\leq \left[ \int_{\Gamma_s} |\chi_{\varepsilon,\eta}(\xi)|^p d\beta_s + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_s} |\chi_{\varepsilon,\eta}(\xi)|^p d\beta_s \right]^{\frac{1}{p}} + o(1) \end{aligned}$$

due à (4.13) et (4.14), nous obtenons

$$\|Q_{n,\varepsilon,\eta}\|_{L^p(\beta_s)} \leq C\eta^{\frac{1}{p}} + o(1) \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.24)$$

Enfin, pour la mesure discrète  $\gamma$  nous avons, pour  $\varepsilon$ ,  $\eta$  fixes et avec le produit de Blaschke égale à zéro dans les points  $z_k$  :

$$\|Q_{n,\varepsilon,\eta}\|_{L^p(\gamma)} = \|B\chi_{\varepsilon,\eta} - Q_{n,\varepsilon,\eta}\|_{L^p(\gamma)} = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.25)$$

En effet, Si nous constatons que

$$Q_{n,\varepsilon,\eta}(z) = B\chi_{\varepsilon,\eta}(0)z^n + \dots,$$

en utilisant

$$m_{n,p}(\alpha) = \|P_{n,p,\alpha}\|_{L^p(\alpha)} = \inf \|Q_n\|_{L^p(\alpha)},$$

#### 4.4 Classe de mesures $\mathfrak{G}$

---

nous obtenons, avec l'aide de (4.22), (4.23) et (4.24)

$$\begin{aligned} m_{n,p}(\alpha) &\leq \left\| \frac{1}{(B\chi_{\varepsilon,\eta})(0)} Q_{n,\varepsilon,\eta} \right\|_{L^p(\alpha)} = \frac{1}{(B\chi_{\varepsilon,\eta})(0)} \|Q_{n,\varepsilon,\eta}\|_{L^p(\alpha)} \\ &\leq \frac{1 + p\varepsilon_1 + 2^p \varepsilon^p}{(B\chi_{\varepsilon,\eta})(0)}. \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant (4.7) avec  $\mu(\beta_a) = \mathcal{D}^p(0) = \mathcal{D}_G^p(\infty)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup m_{n,p}(\alpha) &\leq \mathcal{D}_G(\infty) \prod_{k=1}^{\infty} |z_k| = (\mu(\beta_a))^{\frac{1}{p}} \prod_{k=1}^{\infty} |z_k| \\ &= (\mu(\alpha))^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

□

**Théorème 4.4.3.** Soit  $\Gamma$  le cercle unité et  $\alpha = \beta + \gamma = \beta_a + \beta_s + \gamma$ , telle que  $\alpha \in \mathfrak{G}$ , et  $\mathcal{D}_G$  la fonction de Szegő associée à  $G$ , alors

$$\begin{aligned} (i)- \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} m_{n,p}(\alpha) = \{\mu(\alpha)\}^{\frac{1}{p}}, \\ (ii)- \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{P_{n,p,\alpha}(z)}{z^n} - \frac{\mathcal{D}_G(\infty)}{\mathcal{D}_G(z)} \tilde{B}(z) \right\|_{H^p(G,\rho)} = 0, \\ (iii)- \quad &P_{n,p,\alpha}(z) = z^n \frac{\mathcal{D}_G(\infty)}{\mathcal{D}_G(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_k}{z \bar{z}_k - 1} \frac{|z_k|^2}{z_k} [1 + \epsilon_n(z)], \end{aligned}$$

$\epsilon_n(z) \rightarrow 0$ , uniformément sur les sous ensembles compacts de  $G$ .

**Preuve.**

Pour le point (i) du théorème 4.4.3 d'après le lemme 4.4.2, il reste à voir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf m_{n,p}(\alpha) \geq \{\mu(\alpha)\}^{\frac{1}{p}}.$$

pour se débarrasser de l'hypothèse que la fonction  $|\mathcal{D}_G|$  est bornée inférieurement on utilise l'astuce suivante standard. Nous définissons

$$|\mathcal{D}_\varepsilon(\xi)|^p = |\mathcal{D}_G(\frac{1}{\xi})|^p + \varepsilon^p, \quad \xi \in \Gamma \quad (\varepsilon > 0). \quad (4.27)$$

Notez que  $|\mathcal{D}_\varepsilon|$  est bornée inférieurement. Les propriétés extrémales de  $P_{n,p,\alpha}$  et  $P_{n,p,\alpha_\varepsilon}$  impliquent

$$m_{n,p}(\alpha) = \|P_{n,p,\alpha}\|_{L^p(\alpha)} \geq \|P_{n,p,\alpha}\|_{L^p(\alpha_\varepsilon)} \geq m_{n,p}(\alpha_\varepsilon) \quad (4.28)$$



## Chapitre 4. Comportement asymptotique des polynômes $L^p$ extrémaux en présence d'un ensemble de points de masse dénombrable

---

avec

$$m_{n,p}(\alpha_\varepsilon) = \|P_{n,p,\alpha_\varepsilon}\|_{L^p(\alpha_\varepsilon)},$$

et

$$\|f\|_{L^p(\alpha_\varepsilon)}^p = \int_{\Gamma} |f(\xi)|^p |\mathcal{D}_\varepsilon|^p |d\xi| + \int_{\Gamma} |f(\xi)|^p d\beta_s,$$

Puisque  $\mathcal{D}_\varepsilon(0) \longrightarrow \mathcal{D}_G(\infty)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , nous avons également (voir [34])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{n,p}(\alpha_\varepsilon) = \prod_{k=1}^{\infty} |z_k| \lim_{n \rightarrow \infty} m_{n,p}(\beta_a). \quad (4.29)$$

D'autre part, les résultats cités dans [19] donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{n,p}(\beta_a) = \{\mu(\beta_a)\}^{\frac{1}{p}}. \quad (4.30)$$

En utilisant (4.12), (4.29), (4.30) on obtient

$$\{\mu(\alpha)\}^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} m_{n,p}(\alpha) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} m_{n,p}(\alpha) \leq \{\mu(\alpha)\}^{\frac{1}{p}},$$

et le point (i) du théorème 4.4.3 est établi.

La fonction

$$\Phi_n^+(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{P_{n,p,\alpha}(z)}{z^n} + \psi^*(z) \right),$$

où  $\|\psi^*\|_{H^p(G,\rho)}^p = \mu(\alpha)$ , à la limite suivante

$$\Phi_n^+(\infty) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n^+(z_k) = 0.$$

Comme dans (i), nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|\Phi_n^+\|_{H^p(G,\rho)}^p \geq \mu(\alpha).$$

Finalement, (ii) sera une conséquence du lemme de Keldysh et de l'inégalité Clarkson.

Pour  $0 \leq p \leq 1$ , on utilise l'extension du lemme de Keldysh dû à Bello Hernandez, Marcellan et Minguez [8].

#### 4.4 Classe de mesures $\mathfrak{G}$

---

Nous obtenons (ii) du théorème 4.4.3 dans le cas  $0 < p < 1$ , en appliquant le lemme 4.3.3 à la suite  $\{f_n = \frac{P_{n,p,\alpha}}{z^n}\} \subset H^p(G, \rho)$ .

On obtient

$$f_n(\infty) = 1 \text{ et } \varphi^*(\infty) = 1.$$

Ainsi la condition (a) du lemme 4.3.3 est vérifiée. En revanche, la condition (b) du lemme 4.3.3 est une conséquence du fait que  $\varphi^*(z_k) \neq 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_k) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$

La condition (c) du lemme 4.3.3 est exactement la condition de la convergence du produit de Blaschke. On obtient la condition (d) du lemme 4.3.3 par (i) du théorème 4.4.3.

Pour  $1 \leq p \leq 2$  :

$$\begin{aligned} [\int_{\Gamma} |\Phi_n^+(\zeta)|^p \rho(\zeta) |d\zeta|]^{\frac{1}{p-1}} + [\int_{\Gamma} |\Phi_n^-(\zeta)|^p \rho(\zeta) |d\zeta|]^{\frac{1}{p-1}} &\leq [\frac{1}{2} \int_{\Gamma} |P_{n,p,\alpha}(\zeta)|^p \rho(\zeta) |d\zeta| \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |\psi^*(\zeta)|^p \rho(\zeta) |d\zeta|]^{\frac{1}{p-1}}. \end{aligned}$$

Pour  $2 \leq p < \infty$  :

$$\int_{\Gamma} |\Phi_n^+(\zeta)|^p \rho(\zeta) |d\zeta| + \int_{\Gamma} |\Phi_n^-(\zeta)|^p \rho(\zeta) |d\zeta| \leq \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |P_{n,p,\alpha}(\zeta)|^p \rho(\zeta) |d\zeta| + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} |\psi^*(\zeta)|^p \rho(\zeta) |d\zeta|.$$

où  $\Phi_n^-(z) = \frac{1}{2}(\frac{P_{n,p,\alpha}(z)}{z^n} - \psi^*(z))$ .

Pour prouver (iii), on considère la fonction

$$\epsilon_n = P_{n,p,\alpha} - \psi^*,$$

qui appartient à l'espace  $H^p(G, \rho)$ . Puis en appliquant le lemme 3.3.4 ( voir chapitre 3 ), on obtient

$$\sup\{|\epsilon_n(z)| : z \in K\} \leq C(K) \|\epsilon_n\|_{H^p(G, \rho)} \rightarrow 0,$$

pour tous les sous-ensembles compacts  $K$  de  $G$ . Cela permet d'obtenir la démonstration du théorème 4.4.3.  $\square$

## 4.5 Conclusion

Dans ce travail nous avons apporté une contribution à un problème dans le domaine de la théorie de l'approximation qui porte sur l'étude du comportement asymptotique des polynômes  $L^p$  extrémaux associés à une mesure non absolument continue qui est concentrée sur le cercle plus un nombre infini de points se trouvant à l'extérieur du cercle unité. Nous pensons que les formules asymptotiques obtenues trouveront leurs applications dans plusieurs domaines des mathématiques.

Nous avons surmonter les principales difficultés qui étaient le passage du cas  $p = 2$  au cas  $0 < p < \infty$  et le passage du cas d'un nombre fini de points au cas d'un nombre infini de points. Nous avons affaibli les conditions imposées sur les mesures utilisées. Pour la preuve de la formule (i) nous avons utilisé une perturbation de la fonction de Szegő associée à  $G$ . Les résultats de ce chapitre font l'objet d'un article en rédaction [6].

# Bibliographie

- [1] Alexandre Ern and Jean-Luc Guermand. *Elément finis : théorie, application, mise en oeuvre*, volume 36. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [2] P. Auger and G. Poggiale. Impact of spatial heterogeneity on a predator prey system dynamics. *C. R. Biologies*, (327) :1058–1063, 2004.
- [3] I. Babuska and W. G. Szymczak. Adaptivity and error estimation for the finite element methode applied to convection. *SIAM J. Numer. Anal.*, 21(Issue 5) :910–945, 1984.
- [4] M. Belhout. Strong asymptotics of the  $l^p$  extremal polynomials on the circle  $0 < p < \infty$ . *Int. Math. Forum*, 4(3) :101–112, 2009.
- [5] M. Belhout and Y Laskri. extremal polynomials on a complex curve  $l^p$   $0 < p < \infty$ . *Int. journal of Math. Anal*, 5(5) :231–240, 2011.
- [6] M. Belhout and J. Pousin.  $l^p$  extremal polynomials in the presence of a denumerable set of mass points off the unit circle. *manuscript*.
- [7] M. Belhout, J. Pousin, and Y. Renard. Singular perturbation with a reduced approximation ordre in space for the transport equation. *Int. Math. Forum*, 7(25–28) :1309–1315, 2012.
- [8] M. Bello Hernandez, F. Marcellan, and J. Minguez Ceniceros. Pseudo-uniform convexity in  $h^p$  and some extremal problems on sobolev spaces. *Complex variables*, 48(5) :429–440, 2003.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [9] R. Benzine. Asymptotic behavior of orthogonal polynomials corresponding to a measure with infinite discrete part off a curve. *J. Approx. Theory*, 89 :257–265, 1997.
- [10] S. N. Bernstein. Sur les polynômes orthogonaux relatifs à un segment fini I. *J. Math. Pures Appl*, 9 :127–177, 1930.
- [11] N. Bessonov and V. Volpert. *Dynamic models of plants growth*. Mathematics and Mathematical modelling EPU, publibook université edition, 2006.
- [12] T. T. Cuc Bui, B. Maury, and P. Frey. Méthode du second membre modifié pour la gestion de rapports de viscosité importants dans le problème de stokes bifluide. *C. R. Mecanique*, (336) :524–529, 2008.
- [13] Charles Pierre. *Modélisation et simulation de l'activité électrique du coeur dans le thorex, analyse numérique et méthode de volume finis*. PhD thesis, Université de Nantes, Laboratoire Jean Leray ( UMR 6629 UN-CNRS-ECN) ED 366-221, 2005.
- [14] P. G. Ciarlet. *Finite element method for elliptic equation*. Studies in mathematics and its applications north holland edition, 1979.
- [15] PH. Clement. Approximation by finite element functions using local regularization. *RAIRO, Analyse numérique*, 9 :77–84, 1975.
- [16] M. Crouzeix and F. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, Paris, 1992.
- [17] M. A. Dronne, S. Descombes, E. Grenier, and H. Gilquin. Examples of the influence of the geometry on the propagation of progressives waves. *Mathematical and Computer Modelling EPU*, 49 :2138–2144, 2009.
- [18] Franck Fontvieille. *Décomposition asymptotique et éléments finis*. PhD thesis, Mathématiques et Informatique fondamentale de Lyon, [http ://docinsa.insa-lyon.fr/these/pont.php?id=fontvieille](http://docinsa.insa-lyon.fr/these/pont.php?id=fontvieille), 2004.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [19] Ya. L. Geronimus. On some extremal problems in the space  $l^p_\sigma$ . *Mat. Sb*, 31(73) :3–26, 1952.
- [20] Ya. L. Geronimus. *Polynomials orthogonal on the circle and on an interval*. Fizmatgiz, mofizmatgiz, moscow, 1958. english transl. consultants bureau, new york, consultant bureau, new york edition, 1961.
- [21] M. Golfier, B. Bazin, R. Lenormand, and M. Quintard. Core-scale description of a porous media dissolution during acid injection part 1 theoretical development. *Computational and applied Mathematics*, 23 :179–194, 2004.
- [22] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris, 1983. [Theory and applications].
- [23] G. H. Hardy. On the mean modulus of an analytic function. *Proc. London Math. Soc.*, 14 :269–277, 1915.
- [24] V. A. Kaliaguine. On asymptotique of  $l^p$  extremal polynomials on a complex curve ( $0 < p < \infty$ ). *J. Approx. Theory*, 74 :226–236, 1993.
- [25] V. A. Kaliaguine. A note on the asymptotics of orthogonal polynomials on a complex arc. *J. Approx. Theory*, 80 :138–145, 1995.
- [26] M. V. Kedysh. Select papers, academic press, 1985. [In Russian].
- [27] P. Koosis. *Introduction to  $H^p$  spaces*, volume 40. London Math. Soc. Lecture notes series, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [28] X. Li and K. Pan. Asymptotics for  $l^p$  extremal polynomials on the unit circle. *J. Approx. Theory*, 67 :270–283, 1991.
- [29] X. Li and K. Pan. Asymptotic behavior of orthogonal polynomials corresponding to measure with discrete part off the unit circle. *J. Approx. Theory*, 79 :54–71, 1994.
- [30] D. S. Lubinsky and E. B. Saff. Strong asymptotics for extremal polynomials associated with weight on  $(-\infty, +\infty)$ . *Lecture notes in math*, 1305, 1980.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [31] D. S. Lubinsky and E. B. Saff. Strong asymptotics for  $l^p$  extremal polynomials ( $p > 1$ ) associated with weight on  $[-1, 1]$ . *Lecture notes in math*, 1287 :83–104, 1987.
- [32] H. N. Mhaskar and E. B. Saff. On the distribution of zeros of polynomials orthogonal on the unit circle. *J. Approx. Theory*, 63 :30–38, 1990.
- [33] H. N. Mhaskar and E. B. Saff. The distribution of zeros of asymptotics extremal polynomials on the unit circle. *J. Approx. Theory*, 65 :279–300, 1991.
- [34] J. Minguez Cenicerros and M. Bello Hernandez. Strong asymptotic behavior for extremal polynomials with respect to varying measures on the unit circle. *J. Approx. Theory*, 125(1) :131–144, 2003.
- [35] P. Nevai. *Orthogonal polynomials*, volume 213. Mem. Amer. Math. Soc, 1979.
- [36] P. Nevai and V. Totik. Orthogonals polynomials and their zeros. *Acta. Sci. Math*, 53 :99–104, 1989.
- [37] E. M. Nikishin. The discrete sturm-liouville operator and some problems of function theory. *English Transl in Soviet Math*, 35 :2679–2744, 1987.
- [38] F. Peherstorfer, A. Volberg, and P. Yuditskii. Asymptotics of orthogonal polynomials beyond the scope of szegő theorem. *Funct. Anal. and its App*, 40(4) :264–272, 2006.
- [39] F. Peherstorfer and P. Yuditskii. Asymptotics of orthonormal polynomials in the presence of a denumerable set of mass points. *Proc. Amer. Math. Soc*, 129 :3213–3220, 2001.
- [40] J. Pousin and T. Sassi. A posteriori error for nonconforming Petrov-Galerkin method applied to nonlinear problem. *East-West J. appl. Math*, 2(3) :399–409, 2000.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [41] Y. Renard. The singular dynamic method for constrained second order hyperbolic equations. application to dynamic contact problems. *J. Comput. Appl. Math*, 3(234) :906–923, 2010.
- [42] W. Rudin. *Analytic function of class  $H^p$* , volume 78. Transaction of the Amer. Math. Soc, 1955.
- [43] W. Rudin. *Real and complex analysis*. Mc Graw-Hill, New York, 1968.
- [44] V. J. Smirnov. Sur la théorie des polynômes orthogonaux à une variable complexe. *Journal de la société physico-math de Leningrad*, 2 :155–179, 1928.
- [45] V. J. Smirnov. Sur les formules de cauchy et de green et quelques problèmes qui s’y rattachent. *Bulletin de l’académie des sciences de l’U.R.S.S*, pages 337–372, 1932.
- [46] P. Souetine. *Polynômes orthogonaux sur le contour*. Russian. Math. Surveys t. 21, 1966.
- [47] G. Szegő. *Orthogonal polynomials*, volume 23. Amer. Math. Soc. Colloq. Publications, 4 edition, 1975.
- [48] W. Van Assche. Asymptotics for orthogonal polynomials. Lecture notes in mathematics 1265. Springer Verlag, 1987.
- [49] W. Van Assche and J. S. Geronimo. Asymptotics for orthogonal polynomials on and off the essential spectrum. *J. Approx. Theory*, 55 :220–231, 1988.
- [50] S. S. Walters. The space  $h^p$  ( $0 < p < 1$ ). *Proc. Amer. Math. Soc*, 1 :800–8005, 1950.
- [51] H. Widom. Extremal polynomials associated with a system of curves and arcs in the complex plane. *Adv. Math*, 3 :127–232, 1969.